Title	点過程論によるエネルギー準位統計の数学的基礎付け
Author(s)	南, 就将
Citation	物性研究 (2000), 73(6): 957-1011
Issue Date	2000-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/96794
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

点過程論によるエネルギー準位統計の数学的基礎付け [1]

南 就将 （筑波大学数学系） [2]

（1999年3月11日受理）

直線あるいは一般の空間上のランダムな点配置のことを確率論では点過程 (point process) と称し、詳しく研究されている。ランダム行列や Anderson モデルのように、統計性を含む量子ハミルトニアンのスペクトルは現象論的には点過程と見ることができる。また量子カオスの研究におけるように、本来統計性をもたないハミルトニアンのスペクトルを、あたかも点過程の典型的な実現であるかのようにみなしてその揺らぎを議論することがある。点過程の理論は準位統計の専門家にはこれまであまり知られていなかったようであるが、点過程というものの数学的な取り扱いには意外にデリケートな部分もあるのである。特に点と点の間隔分布については直観に反するような事実がいくつかある。本稿の目的は点過程論の概略を解説しつつ、その準位統計の現象論との対応を考えることである。準位統計の背後にある Anderson 転移や量子カオスの本質に迫るには至ってないが、量子準位というものを統計的に見ることの意味合いを確率論の立場から考えてみたかったのである。物理学者からの自由な批判を期待する。特に第8節についてそう思う。

なお本稿は 1998 年 6 月に日本大学理工学部物理学教室で行なった筆者の講義に基づいている。このような機会を与えて下さった糸井千岳氏に深く感謝する。また筆者の拙い講義に耳を傾けて下さった出席者の方々にも心より感謝したいと思う。

目 次

[1] 科学研究費補助金（基盤研究 (C)(2)）課題番号 09640241

[2] e-mail: minami@sakura.cc.tsukuba.ac.jp

1　公理的確率論の概要

この節では基本的な用語の準備も兼ねて、確率論の基礎概念および後で用いる定理をいくつか紹介する。

1.1　確率空間 (probability space)

現代の確率論は抽象的な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ というものを理論の足場にする。ここで Ω は空でない任意の集合、$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合の族で、次の意味で $\sigma-$ 代数の構造をもつものである:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$. ただし $A^c = \Omega \setminus A$ は A の補集合.

(iii) $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \ \in \mathcal{F} \ . \tag{1}$$

$\mathcal{F}$ に属する集合は"事象"と呼ばれる。さらに P は各々の $A \in \mathcal{F}$ に実数 $P(A)$ を対応させる集合関数で次の条件を満たすもの：

(iv) $P(A) \geq 0$;

(v) $P(\Omega) = 1$;

(vi) $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ であり、かつ $n \neq m$ に対して $A_n \cap A_m = \emptyset$ となるならば

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) . \tag{2}$$

$P(A)$ は事象 A の"確率"と呼ばれる。

集合 Ω は統計学においては標本空間と呼ばれ、試行の結果として論理的あるいは現実的に可能なデータの集まりという意味を持つ。一方確率論を統計力学に応用する場合には Ω は与えられた物理系が取り得る状態の全体（アンサンブル）を表すとも考えられる。このように Ω はかなり抽象的な性格をもつもので、問題に応じて様々な意味付けがなされる。また確率の計算を進める過程で空間 Ω は必要に応じて拡張されたり、逆に制限されたり、さらには全く異なる空間と取り換えられることもある。

条件 (i)-(vi) に述べてなくとも、それらから自動的に従うことがらがいくつかあることに注意しておく。例えば (i), (ii) より $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$. また (iii), (ii) および de Morgan の法則：

$$(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \quad ; \quad (\bigcap_n A_n)^c = \bigcup_n A_n^c$$

より、(iii) において $\bigcup$ を $\bigcap$ でおきかえた命題も成り立つ。また (iv) において $A_n = \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$ とすれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, かつ A_n たちは互いに排反。従って

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots .$$

これと (iv) より $P(\emptyset) = 0$ となる... 等.

1.2 確率変数 (random variable)

確率変数とは試行の結果により値の決まる量、即ち Ω 上の関数 $X(\omega)$ のことである。ただし最低限の要請として、任意の実数 x に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \tag{3}$$

となること、いいかえると関数 $X(\omega)$ が $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}$ について可測であることを仮定する。この式の左辺に現れる集合は、しばしば簡略に $\{X \leq x\}$ と記される。この仮定により x の関数

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x) \tag{4}$$

を考えることができる。$F(x)$ を確率変数 X の分布関数という。確率論においては ω の関数としての確率変数 $X(\omega)$ そのものよりも、その分布関数 $F_X(x)$ の方が重要な意味をもつことがしばしばある。

$$p(x) \geq 0 \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \tag{5}$$

を満たす関数 $p(x)$ が存在して

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy \quad , \ x \in \mathbf{R} \tag{6}$$

が成り立つとき確率変数 X は絶対連続分布を持つといい、$p(x)$ をその分布密度関数という。特に

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2] \quad (\sigma > 0 \ , \ m \in \mathbf{R}) \tag{7}$$

のとき X は平均 m 、分散 σ^2 の正規分布（ Gauss 分布）に従うといい、

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{8}$$

のとき X はパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従うという。

一方、実数の列 $\{\alpha_n\}_n$ および $\{p_n\}_n$ が存在して（ただし $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n = 1$ ）

$$F_X(x) = \sum_{\alpha_n \leq x} p_n = \int_{-\infty}^{x} \sum_n p_n \delta(y - \alpha_n)dy \tag{9}$$

となるとき X は離散分布を持つという。特に

$$\alpha_n = n \ ; \ p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

のとき X はパラメータ $\lambda > 0$ の Poisson 分布に従うという。

さて、確率変数 X の、空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上での積分（抽象ルベーグ積分）を X の期待値と呼び、$E[X]$ で表す。即ち

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) \ . \tag{11}$$

この式において $x = X(\omega)$ という変数変換をすれば

$$E[X] = \int_{\mathbf{R}} xP(X \in dx) \ , \tag{12}$$

あるいは分布関数の定義式より $P(X \in dx) = dF(x)$ だから

$$E[X] = \int_{\mathbf{R}} xdF(x) \tag{13}$$

となる。この式の右辺は Stieltjes 積分である。X が絶対連続分布を持つときはこれはさらに

$$E[X] = \int_{\mathbf{R}} xp(x)dx \tag{14}$$

となり、また離散分布を持つときは

$$E[X] = \sum_n \alpha_n p_n = \sum_n \alpha_n P(X = \alpha_n) \tag{15}$$

となる。ただし、いずれの場合も積分または級数の絶対収束は仮定されている。

また X の分散 $V[X]$ は

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{16}$$

により定義される。

正の確率を持つ事象 $B \in \mathcal{F}$ が与えられたとき

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \tag{17}$$

によって $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の新しい確率測度 $P(\cdot|B)$ が定義される。$P(A|B)$ を事象 B に関する事象 A の条件付き確率と呼ぶ。また X が確率変数のとき

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) \tag{18}$$

を事象 B に関する X の条件付き分布関数、

$$E[X|B] = \int xdF_X(x|B) \tag{19}$$

を事象 B に関する X の条件付き期待値という。

以上の定義において $P(B) > 0$ という条件を仮定したが、この条件を満たさなくとも直観的には条件つき確率としての意味を持つべきものがある。たとえば X , Y が確率変数のとき

$$E[X|Y = y] \tag{20}$$

のようなものは Y が絶対連続分布をもつならば (19) のようには定義できないが（$P(Y = y) = 0$ であるから)、だからといって全く考えずにすますわけにはいかないであろう。また準位統計においては、特定のエネルギー値に準位があるという条件のもとに様々な事象の確率を考えるがこれについても同様の問題がある。これらの “条件つき確率” については別に考察しなければならない。(確率 0 の事象に関する条件つき確率にまつわる諸問題については例えば Rao の解説記事 [18] を参照されたい。)

$X_1, \ldots, X_n$ が確率変数のとき $\mathbf{R}^n$ 上の関数

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \tag{21}$$

をそれらの結合分布関数という。これに対し各々の X_j の分布関数を周辺分布関数ということがある。

任意の $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n) \tag{22}$$

となるとき確率変数は互いに独立であるという。このとき積分が絶対収束するという条件の下に

$$E[X_1\cdots X_n]=E[X_1]\cdots E[X_n]\ , \tag{23}$$

が成り立つ。あるいはより一般に可測関数 $f_1,\ldots,f_n$ に対して

$$E[f_1(X_1)\cdots f_n(X_n)]=E[f_1(X_1)]\cdots E[f_n(X_n)] \tag{24}$$

となる。さて

$$C(X_i,X_j)\equiv E\left[(X_i-E[X_i])(X_j-E[X_j])\right] \tag{25}$$

を確率変数 X_i , X_j の共分散という。今述べたことから $X_1,\ldots,X_n$ が独立ならば $i\neq j$ に対して $C(X_i,X_j)=0$ 、即ち $X_1,\ldots,X_n$ は無相関となる。このとき

$$V[\sum_{j=1}^n X_j]=\sum_{j=1}^n V[X_j] \tag{26}$$

が成り立つことを容易に示すことができる。ただし、無相関だからといって $X_1,\ldots,X_n$ が独立とは限らないことに注意する。

$X_1,\ldots,X_n$ がそれぞれ離散的な分布を持つとき、それらの独立性は

$$P(X_1=\alpha_1,\ldots,X_n=\alpha_n)=P(X_1=\alpha_1)\cdots P(X_n=\alpha_n) \tag{27}$$

と表現される。ただし $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ はそれぞれ $X_1,\ldots,X_n$ が取り得る任意の値とする。

$\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $p(x_1,\ldots,x_n)$ で

$$p(x_1,\ldots,x_n)\geq 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n=1 \tag{28}$$

を満たすものがあって

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}dy_1\cdots\int_{-\infty}^{x_n}dy_n\ p(y_1,\ldots,y_n) \tag{29}$$

となるとき、$X_1,\ldots,X_n$ は絶対連続な結合分布関数を持つという。このとき各 X_j の周辺分布関数も絶対連続となる。その密度関数をそれぞれ $p_j(x_j)$ とすると $X_1,\ldots,X_n$ の独立性は

$$p(x_1,\ldots,x_n)=p_1(x_1)\cdots p_n(x_n) \tag{30}$$

と表現される。

最後に $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ が確率変数の無限列のとき、その独立性は各々の $n\geq 1$ に対して $X_1,\ldots,X_n$ が上記の意味で独立になることと定義する。

1.3 独立同分布確率変数列に対する極限定理

確率変数列 $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ は 1.2 の意味で独立であり、それぞれは共通の分布関数を持つとする。このとき $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ は i.i.d. (independent and identically distributed) であるという。ここでは初等確率論における代表的な極限定理を３つ挙げておく。

(I) 大数の強法則。確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は i.i.d. で、$E[|X_n|] < \infty$ とする。このとき $E[X_n] = m$ として

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = m\right) = 1 .$$

これより、次の大数の弱法則が自動的に出る：任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - m| > \epsilon\right) = 0 .$$

(II) 中心極限定理。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ はやはり i.i.d. かつ $E[X_n^2] < \infty$ とする。(大数の法則のときよりも強い条件である。) さらに $E[X_n] = m$, $V[X_n] = \sigma^2 > 0$ とすると任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{n} (X_j - m) \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx .$$

(III) Poisson の小数の法則。$n = 1,2,\ldots$ に対して n 個の確率変数 $X_1^{(n)},\ldots,X_n^{(n)}$ は独立で、0 か 1 の値のみをとるものとする。さらに定数 $\lambda > 0$ が存在して $P(X_j^{(n)} = 1) = \lambda/n$ となるならば

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^{(n)} = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad ; \quad k = 0,1,\ldots .$$

事象の確率は、試行を多数回繰り返したときにその事象が観測される頻度によって推定 (あるいは測定) されるが、大数の法則はその根拠を与えている。次項で述べるエルゴード定理も同様の意味を持っている。また確率論の応用において正規分布と Poisson 分布が重要になるのはそれぞれ中心極限定理と Poisson の小数の法則があるからだと言ってよい。

1.4 エルゴード定理

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ は確率空間、T は時間パラメータの集合で、以下 $T = \mathbf{R}$ (連続時間) または $T = \mathbf{Z}$ (離散時間) の場合を考える。各々の $t \in T$ に対して Ω から Ω への写像 θ_t が与えられていて次の条件を満たすとしよう：

(i) θ_t は全単射、いいかえると θ_t は逆写像 θ_t^{-1} を持つ；

(ii) θ_t は可測、即ち $A \in \mathcal{F}$ ならば $\theta_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となる（ただし連続時間の場合は (t,ω) 2変数に関して同時に可測になることを仮定する）；

(iii) θ_t は P を保存する、即ち $A \in \mathcal{F}$ ならば $P(\theta_t(A)) = P(A)$；

(iv) $\{\theta_t; t \in T\}$ は変換群をなす、即ち任意の $t, s \in T$ について $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$. また、$\theta_0 = I =$ 恒等写像 . この2つから特に $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$.

$T = \mathbf{R}$ のとき、この変換群 $\{\theta_t; t \in T\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における flow と呼ぶ。$T = \mathbf{Z}$ のときは変換群 $\{\theta_t; t \in T\}$ はただ一つの変換 $\theta = \theta_1$ により生成される: $\theta_t = \theta^t$. この θ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における automorphism ということにする。

任意の $t \in T$ に対して $\theta_t(A) = A$ となるような $A \subset \Omega$ をこの変換群の不変集合という。離散時間の場合この条件は $\theta(A) = A$ と同じことである。$A \in \mathcal{F}$ なる不変集合が $P(A) = 1$ または $P(A) = 0$ となるものに限られるとき flow あるいは automorphism はエルゴード的であるという。

flow または automorphism は連続時間または離散時間の力学系の概念を抽象化したものである。したがって確率空間は力学系の相空間という意味も持っている。flow(automorphism) がエルゴード的でないとき、$0 < P(A) < 1$ なる不変集合 A が存在する。すると θ_t を A および A^c に制限することにより我々の力学系は相互作用のない2つの部分に分解されることになる。エルゴード性とはこのような分解が不可能であることを意味している。ただし本稿においては後にみるように $\{\theta_t : t \in T\}$ は空間的な平行移動を表すにすぎず、力学系とのアナロジーはそれ程密接ではない。

後で用いるために Birkhoff の個別エルゴード定理と von Neumann の平均エルゴード定理を紹介する。詳しくは例えば十時 [22] または Reed, Simon [19] を参照されたい。

個別エルゴード定理　f は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可測関数（確率変数）で $E[|f|] < \infty$ なるものとする。このとき Ω 上の可測関数 $\bar{f}$ で次のようなものが存在する：

(a) $E[|\bar{f}|] < \infty$；

(b) $\bar{f}$ は不変関数、即ち $\bar{f}(\theta_t\omega) = \bar{f}(\omega)$；

(c) A が可測な不変集合ならば

$$\int_A \bar{f}(\omega)\ P(d\omega) = \int_A f(\omega)\ P(d\omega)$$

特に $A = \Omega$ として $E[\bar{f}] = E[f]$；

(d) 確率１で

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R f(\theta_t\omega)dt=\bar{f}(\omega)\ .$$

平均エルゴード定理 f は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の可測関数（確率変数）で $E[|f|^2]<\infty$ なるものとする。このとき個別エルゴード定理に現れる可測関数 $\bar{f}$ は上記に加えて次を満たす：

(e) $E[|\bar{f}|^2]<\infty$;

(f) $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の二乗平均収束の意味で

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R f(\theta_t\omega)dt=\bar{f}(\omega)\ .$$

flow のかわりに automorphism θ が与えられたときも同様の主張が

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f(\theta^j\omega)=\bar{f}(\omega)$$

について成立する。

2　直線上の点過程の一般論

確率論において点過程は通常“非負整数値ラドン測度を値とする確率変数”と定義される。こうすることにより直線上のみならず一般の局所コンパクト位相空間上の点過程を扱うことができるのだが、その理論は抽象数学に傾き過ぎると思われるので、ここではより直接的な定式化を行う。

つぎのようなものを考える：

1. 直線 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ の有限または可算無限部分集合 ξ で、任意の有限区間 I に対して $\xi\cap I$ が有限集合となるもの。（つまり ξ は有限な集積点を持たず、真に離散的である。）
2. ξ を定義域とする自然数値関数 $m_\xi(x)$ $(x\in\xi)$.

上の２条件を満たす ξ , m_ξ の組を一般に N で表して“点配置 (configuration) ”と呼ぶことにしよう。$m_\xi(x)$ は ξ の点 x の重複度を表す。点配置 N の全体を Q とする。また $\mathbf{R}$ の有限部分集合 A に対して

$$N(A)=\sum_{x\in\xi\cap A}m_\xi(x)\ , \tag{31}$$

また $\mathbf{R}$ 上の関数 f に対して

$$N(f) = \sum_{x \in \xi} m_\xi(x) f(x) \tag{32}$$

と書く。$f = 1_A$ (A の定義関数) のとき $N(1_A) = N(A)$ である。$m_\xi(x) \equiv 1$ であるような点配置は単純 (simple) であるといわれる。単純な点配置の全体を Q_1 で表す。$N = (\xi, m_\xi)$ が単純なときは

$$N(A) = \sharp(A \cap \xi) \quad ; \quad N(f) = \sum_{x \in \xi} f(x) \tag{33}$$

となる。

点配置を表すのに、より直観に訴える

$$N = \sum_{x \in \xi} m_\xi(x) \delta(x - \cdot) \tag{34}$$

という書き方も用いる。$\delta(x - \cdot)$ を点 x に集中した δ 関数と見るか、δ 測度と見るかによって

$$N(f) = \int f(y) N(y) dy \quad \text{または} \quad N(f) = \int f(y) N(dy) \tag{35}$$

となるが、本稿では後者の書き方を好んで用いる。

さてランダムな点配置としての点過程を次のように定義する。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から配置の空間 Q への写像

$$\Omega \ni \omega \longmapsto N_\omega \in Q \tag{36}$$

は、任意の有限区間 $I \subset \mathbf{R}$ に対して $N(I) = N_\omega(I)$ が非負整数値確率変数になるとき、即ち $k = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid N_\omega(I) = k\} \ \in \ \mathcal{F}$$

となるとき、点過程であるといわれる。すべての $\omega \in \Omega$ に対して $N_\omega \in Q_1$ となっているとき点過程 N_ω は単純であるという。

前に述べたように、ω の関数としての点過程 N そのものよりも、その確率分布の方が重要性を持つことがよくある。ここで点過程 N の確率分布とは、互いに排反な有限区間の任意の列 $I_1, \ldots, I_n$ および任意の非負整数 $k_1, \ldots, k_n$ に対する次の確率の値の全体である：

$$P(N(I_1) = k_1, \ldots, N(I_n) = k_n) \equiv p(I_1, \ldots, I_n; k_1, \ldots, k_n) \ . \tag{37}$$

これらの確率の値がすべて定まれば、実際上は点過程 N に関するあらゆる事象の確率が定まるといってよい。また２つの点過程（その定義域たる確率空間は異なっていてもよ

い）に対するこれらの確率 $p(I_1,\ldots,I_n;k_1,\ldots,k_n)$ の値がすべて一致するとき、２つの点過程は同じ確率分布に従うという。

N が確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の点過程で、$f(x)\geq 0$ が Borel 可測関数ならば $\exp(-N(f))$ は有界な確率変数である。従ってその期待値

$$\psi_N(f)\equiv E[\exp(-N(f))] \tag{38}$$

が存在するが、これを f の汎関数と見るとき、点過程 N に対する Laplace 汎関数という。 Laplace 汎関数 $\psi_N(\cdot)$ は点過程 N の確率分布を一意に決めることが知られている。

次に点過程の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ の点過程 N への分布の意味での収束（弱収束という）を考える。そのためにはまず（ω に依存しない）点配置の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が別の点配置 N に収束するということを定義しなければならない。これは点配置 $N^{(k)}$ を構成する点が全体として N を構成する点に近づくことであるが、正確には次のように述べられる：

点配置の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が点配置 N に収束するとは、$f(x)\geq 0$ なる連続関数で、ある有限区間（ f ごとに異なっていてよい）の外では恒等的に 0 となるようなもの（今後は compact support を持つ連続関数ということにする）に対して

$$N^{(k)}(f)\longrightarrow N(f) \tag{39}$$

となることである。このとき単に $N^{(k)}\to N$ と書くことにする。

この定義によって点配置の空間 Q に収束概念、あるいは位相が導入される。そして点過程の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が点過程 N に弱収束するということは、点配置の空間 Q 上の任意の有界連続汎関数 F に対して

$$E[F(N^{(k)})]\longrightarrow E[F(N)] \quad (k\to\infty) \tag{40}$$

となることと定義される。ただし Q 上の（実数値）汎関数 F が連続とは

$$Q \text{ において } N^{(k)}\to N\ (k\to\infty) \quad \text{のとき} \quad F(N^{(k)})\to F(N)\ (k\to\infty) \tag{41}$$

となることである。また F が連続汎関数で、N が点過程ならば $F(N)$ は確率変数となることに注意する。さらに、点過程の弱収束とは実は点過程の確率分布の収束のことであり、ω の関数の列としての $\{N_\omega^{(k)}\}$ の N_ω へのいかなる意味での収束も意味するのではないことに注意しておく。従って $N^{(k)}$, N の定義域たる確率空間 Ω が k ごとにすべて異なっていても上記の定義は意味を持つ。

点過程の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が N に弱収束するためには実は $f(x)\geq 0$ なる連続関数で、compact support を持つすべてのものに対して

$$\psi_{N^{(k)}}(f)\longrightarrow\psi_N(f) \tag{42}$$

となることが必要十分であることが知られている。

以上の内容も含めて、点過程の一般論の本格的な説明については例えば Neveu の講義録 [16] または Daley, Vere-Jones の書 [6] を参照されたい。

3 定常な Poisson 点過程

3.1 定義と基本的な性質

点過程 N は、次の２条件を満たすとき平均 $\lambda > 0$ の定常な Poisson 点過程と呼ばれる：

1. $A \cap B = \emptyset$ ならば $N(A)$ と $N(B)$ は互いに独立な確率変数。

2. $A \subset \mathbf{R}$ が有界な Borel 集合、$|A|$ がその Lesbesgue 測度（集合の長さ）ならば $N(A)$ は平均 $\lambda|A|$ の Poisson 分布に従う。即ち

$$P(N(A) = k) = e^{-\lambda|A|}\frac{(\lambda|A|)^k}{k!} \quad , \ k = 0, 1, \ldots . \tag{43}$$

この定義から次のことがわかる。

命題 3.1 定常な Poisson 点過程 N_ω の Laplace 汎関数は

$$\psi_N(f) = \exp[-\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx] \tag{44}$$

となる。ただし $f(x) \geq 0$ は Borel 可測関数。

略証. 簡単のため $f(x)$ は連続で、有限区間 $I = [a, b]$ の外では恒等的に 0 とする。I を十分細かな区間 I_j に分割し、$c_j = f(x_j)$, $x_j \in I$ とすると $f(x)$ は階段関数

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{I_j}(x)$$

で近似される。このような階段関数に対して上の公式を証明するのは直接計算により可能である。あとは極限移行によって一般の f の場合も示される。

命題 3.2 $h \downarrow 0$ とするとき、

$$P(N(t, t+h] \geq 2) = \mathcal{O}(h^2) . \tag{45}$$

５節に述べるようにこのことから Poisson 点過程 N は単純であることがわかる。

命題 3.3 今述べたように Poisson 点過程 N は単純であるから、N_ω を構成する点を一列に並べることができる。その際、原点の右にあって原点に最も近い点を $x_1(\omega)$ と名づける。そうすると他の点の名も自動的に決まって

$$\cdots < x_{-2}(\omega) < x_{-1}(\omega) < x_0(\omega) \leq 0 < x_1(\omega) < x_2(\omega) < \cdots \tag{46}$$

となる。このとき確率変数列

$$\ldots,(x_{-2}-x_{-3})\ ,\ (x_{-1}-x_{-2})\ ,\ (x_0-x_{-1})\ ;\ -x_0\ ;\ x_1\ ,\ (x_2-x_1)\ ,\ldots \tag{47}$$

は独立でいずれも指数分布 $\lambda e^{-\lambda t}dt$ に従う。

この定理にすっきりした証明を与えるのは意外に難しい。(詳しくは例えば Kingman [10] を参照。) ここでは x_1 と x_2-x_1 が独立で、ともに指数分布に従うことをやや不完全な議論で示すにとどめる。

$t_1, t_2>0$ とし、t_1 , t_2 の周囲の、長さ dt_1 , dt_2 の微小区間を考える。すると x_1 , x_2 の定義より

$$\begin{aligned}
& P(x_1(\omega)\in dt_1\ ,\ x_2(\omega)\in dt_2)\\
=\ & P(N_\omega(0,t_1]=0, N_\omega(t_1,t_1+dt_1]=1, N_\omega(t_1+dt_1,t_1+t_2]=0, N_\omega(t_2,t_2+dt_2]\geq 1)\\
=\ & P(N_\omega(0,t_1]=0)P(N_\omega(t_1,t_1+dt_1]=1)P(N_\omega(t_1+dt_1,t_1+t_2]=0)\\
& \times P(N_\omega(t_1+t_2,t_1+t_2+dt_2]\geq 1)\\
=\ & (e^{-\lambda t_1}\lambda dt_1)(e^{-\lambda t_2}\lambda dt_2)
\end{aligned}$$

隣り合う点の間隔を $\tau_n(\omega)=x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)$ とおくと、今示したことから $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は独立な確率変数列となる。$n\neq 1$ ならば τ_n は指数分布 $\lambda e^{-\lambda t}dt$ に従うが、$\tau_1=x_1-x_0$, 即ち原点をはさむ２点 x_0 , x_1 の間隔だけは違う分布に従う。実際 $-x_0$, x_1 が独立でそれぞれ指数分布に従うことから

$$\begin{aligned}
P(\tau_1\leq t) &= P((-x_0)+x_1\leq t)=\int_0^\infty\int_0^\infty 1_{(0,t]}(s+u)\lambda e^{-\lambda s}\lambda e^{-\lambda u}dsdu\\
&= 1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

これを微分して

$$P(\tau_1\in dt)=\lambda^2 te^{-\lambda t}dt\ . \tag{48}$$

τ_1 の分布密度関数 $\lambda^2 te^{-\lambda t}$ は $t=1/\lambda$ にピークを持っているが、τ_n , $n\neq 1$ に対する密度関数 $\lambda e^{-\lambda t}$ は $t=0$ にピークを持っている。即ち原点をはさむ２点 x_0 , x_1 の間にのみ反撥が見られるのである。この一見奇妙な現象は定常な点過程一般に共通することである。(７節参照。)

3.2 complete randomness

Poisson 点過程の条件 **1.** はしばしば complete randomness と呼ばれる。実はこの条件は N の分布の Poisson 性を実質的に決めてしまうことが知られている。即ち次の定理が成り立つ：

定理. 点過程 N は次の条件を満たすとする：

(a) 空でない任意の区間 I に対して

$$P(N(I)>0)>0\ .$$

(b) 区間 I , J が重なり合わないならば確率変数 $N(I)$ と $N(J)$ は互いに独立。

(c) 確率変数 $N(a+t,b+t]$ の分布は t に依らない。

このとき N は次の形のものに限る：

$$N_\omega(\cdot)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}m_n(\omega)\delta(x_n(\omega)-\cdot)\ . \tag{49}$$

但し $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は Poisson 点過程を成し、$\{m_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と独立で互いの間でも独立同分布な自然数値確率変数列である。即ち N は Poisson 点過程に従って配置された点の各々にランダムな重複度を与えたものになっている。このような点過程を複合 Poisson 点過程という。特に上の条件 (a), (b), (c) を満たす単純な点過程は Poisson 点過程に限られる。

3.3　Poisson 点過程への弱収束

Poisson 点過程はしばしば、互いに独立でそれぞれは小さな密度を持つ点過程を数多く重ねあわせた極限として得られる。このことを数学的に定式化すると次のようになる：$L=1,2,\ldots$ に対して点過程の列

$$N_L^1\ ,\ldots,N_L^{k_L} \tag{50}$$

が次の条件を満たすように与えられているとする：

(0) $L\to\infty$ とするとき $k_L\to\infty$;

(i) $N_L^1,\ldots,N_L^{k_L}$ は互いに独立 ;

(ii) $\lim_{L\to\infty}\max_{1\le j\le k_L}\ P(N_L^j(A)\ge 1)=0$;

(iii) $\lim_{L\to\infty}\sum_{j=1}^{k_L}P(N_L^j(A)\ge 2)=0$;

(iv) $\lim_{L\to\infty}\sum_{j=1}^{k_L}P(N_L^j(A)\ge 1)=\lambda|A|$.

但し λ は定数。また (ii), (iii), (iv) において A は任意の有限区間を表すものとする。

定理. 上記の条件の下に N_L^j たちの重ねあわせ $N_L = \sum_{j=1}^{k_L} N_L^j$ は $L \to \infty$ とするとき $\lambda \geq 0$ の定常 Poisson 点過程に弱収束する。

この定理の証明は Daley と Vere-Jones の書 [6] にあるが、ここでその概略を述べておく。示すべきことは、点過程 N_L の Laplace 汎関数が Poisson 点過程のそれに収束することである。即ち $f(x) \geq 0$ はある有界区間 A の外側で恒等的に 0 となる連続関数として、

$$\psi_L(f) \equiv E[\exp(-N_L(f))] \longrightarrow \exp\{-\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-f(x)})dx\} \quad (L \to \infty) \tag{51}$$

が成り立つこと、いいかえると

$$\lim_{L\to\infty} \log \psi_L(f) = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-f(x)})dx \tag{52}$$

が成り立つことを示せばよい。さらにそのためには A を小区間 $A_1, \ldots, A_M$, $A_k = [x_{k-1}, x_k]$ に分割した上で関数 $f(x)$ を階段関数

$$g(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k 1_{A_k}(x) \quad ただし \;\; c_k = f(x_k)$$

でおきかえてよい。分割を細かくすれば $g(x)$ は $f(x)$ を任意の精度で一様近似するから、証明すべき式において f を g でおきかえることによる誤差は任意に小さくできる。

さて条件 (i) により

$$\begin{aligned}
\log \psi_L(g) &= \log E[\exp(-\sum_{j=1}^{k_L} N_L^j(g))] \\
&= \log \prod_{j=1}^{k_L} E[\exp(-N_L^j(g))] \\
&= \sum_{j=1}^{k_L} \log E[\exp(-N_L^j(g))]
\end{aligned}$$

ここで log の中にある期待値は

$$\begin{aligned}
E[\exp(-N_{\omega,L}^j(g))] &= P(N_L^j(A) = 0) \\
&\quad + E[N_L^j(A) = 1 \; ; \; \exp(-N_{\omega,L}^j(g))] \\
&\quad + E[N_L^j(A) \geq 2 \; ; \; \exp(-N_{\omega,L}^j(g))]
\end{aligned}$$

と３つに分けられるが、[3]このうち右辺の第１項、第３項については

$$P(N_L^j(A)=0)=1-P(N_L^j(A)\geq 1)\ ;$$

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{j=1}^{k_L}P(N_L^j(A)\geq 1)=\lambda|A|\ ,$$

および

$$E\left[N_L^j(A)\geq 2\ ;\ \exp(-N_L^j(g))\right]\ \leq\ P(N_L^j(A)\geq 2)\ ;$$

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{j=1}^{k_L}P(N_{\omega,L}^j(A)\geq 2)=0$$

なる評価が成り立つ。また第２項は

$$\begin{aligned}&E[N_L^j(A)=1\ ;\ \exp(-N_L^j(g))]\\ =\ &\sum_{k=1}^{M}P(N_L^j(A_k)=1\ ,\ N_L^j(A_\ell)=0\ ,\ \text{for }\ell\neq k)\exp(-c_k)\end{aligned}$$

と書き換えられるが、これについては

$$\begin{aligned}&P(N_L^j(A_k)\geq 1)-P(N_L^j(A_k)=1\ ,\ N_L^j(A_\ell)=0\ ,\ \text{for }\ell\neq k)\\ \leq\ &P(N_L^j(A)\geq 2)\end{aligned}$$

が成り立つ。以上をまとめて

$$\begin{aligned}\log\psi_L(g)\ &=\ \sum_{j=1}^{k_L}\log\Big\{1-P(N_L^j(A)\geq 1)\\ &\qquad+\sum_{k=1}^{M}P(N_L^j(A_k)\geq 1)e^{-c_k}+\mathcal{O}(P(N_L^j(A)\geq 2))\Big\}\\ &=\ -\sum_{j=1}^{k_L}P(N_L^j(A)\geq 1)+\sum_{k=1}^{M}e^{-c_k}\sum_{j=1}^{k_L}P(N_L^j(A_k)\geq 1)\\ &\qquad+\mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{k_L}P(N_L^j(A)\geq 2)\right)\\ &\longrightarrow\ -\lambda|A|+\sum_{k=1}^{M}e^{-c_k}\lambda|A_k|=-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-g(x)})dx\end{aligned}$$

を得る。（証明終わり。）

[3]一般に確率変数 X および事象 A に対して $E[A;X]=E[1_AX]$ とする。

特に N_L^j , $j = 1, \ldots, k_L$ がそれぞれ単純で同じ分布に従うとき、条件 (iii), (iv) が成り立つためには次の (v), (vi) が十分である：

任意の有界区間 A に対して、

(v)

$$\lim_{L\to\infty} E[N_L^j(A)] = \lambda|A| \ ;$$

(vi)

$$\lim_{L\to\infty} k_L E[N_L^j(A)(N_{\omega,L}(A)-1)] = 0 \ .$$

4 Anderson 局在とスペクトルの Poisson 性

前節に述べたことの応用として Anderson 局在を起こすランダム系のスペクトルは Poisson 点過程で近似されることが示される。詳細は [13] および [15] にゆずってここでは直感的なアイディアのみを述べる。

Anderson の tight binding model は d 次元格子 $\mathbf{Z}^d$ 上の関数 $u(x)$ に次のように作用するランダムな Hamiltonian である：

$$(Hu)(x) = -(\Delta u)(x) + V_\omega(x)u(x) \quad , \ x \in \mathbf{Z}^d \ . \tag{53}$$

但し

$$(\Delta u)(x) = \sum_{|y-x|=1} (u(y) - u(x)) \tag{54}$$

は Laplacian の差分化、また $V = \{V_\omega(x) : x \in \mathbf{Z}^d\}$ は独立同分布な確率変数族である。V はランダム・ポテンシャルを表している。以下各々の $V_\omega(x)$ は有界な確率分布密度を持つとする。即ち

$$P(V(x) \le t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(s)ds \quad , \ 0 \le \rho(s) \le C = \text{定数} \ . \tag{55}$$

さて、ここでは大きな有界領域 $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ に H を制限したもの

$$H_\Lambda = \chi_\Lambda H \chi_\Lambda \tag{56}$$

を考え、そのスペクトルの点過程としての極限的性質を問題にする。そこで H_Λ の固有値を

$$E_1(\Lambda) < E_2(\Lambda) < \cdots < E_L(\Lambda) \quad , \ L = |\Lambda| \tag{57}$$

とする。H_Λ の固有値は $V(x)$ に対する上記の仮定の下に確率 1 で非縮退であることが知られている。([11] 参照。)

さらに Λ を hypercube とすると、ランダムでない関数 $n(E)$ が存在して確率 1 で

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d}\frac{1}{|\Lambda|}\sharp\{j \mid E_j(\Lambda)\le E\}=\int_{-\infty}^{E}n(E')dE' \tag{58}$$

となることが知られている。(例えば [5] を見よ。) この $n(E)$ を状態密度関数 (density of states) という。 $n(E)$ が有界 (実は $n(E)\le\sup_t\rho(t)$) であることは容易に示すことができる。(ただし $n(E)$ の連続性、微分可能性，解析性などを証明するのは難しい問題である。) したがって

$$\nu(E)=\int_{-\infty}^{E}n(E')dE' \tag{59}$$

により integrated density of states $\nu(E)$ を定義すると、Lesbesgue 積分論で知られているように $\nu(E)$ は殆どすべての E に対して微分可能で、$\nu'(E)=n(E)$ となる。今そのような E の値を一つ固定すると、上の式より E の近傍で準位 $\{E_j(\Lambda)\}_j$ の間隔は $(n(E)|\Lambda|)^{-1}$ のオーダーであると考えられる。そこで E を中心として、

$$e_j(\Lambda)\equiv|\Lambda|(E_j(\Lambda)-E) \tag{60}$$

のようにスケール (あるいは unfold) した準位 $\{e_j(\Lambda)\}_j$ を考える。さらに

$$N^{\Lambda,E}(\cdot)=\sum_j\delta(e_j(\Lambda)-\cdot) \tag{61}$$

なる点過程を考えるとき、 $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d$ におけるその極限挙動を問題にするのは自然なことであろう。E の近傍において Anderson 局在が起きるかどうかによってこの極限挙動が異なることが数値実験などによって明らかにされているが、数学的に厳密な理論はまだできあがっていない。ここでは Anderson 局在を保証するような次の条件 (c.f. [1], [7]) の下で $N^{\Lambda,E}$ の極限が平均 $n(E)$ の Poisson 点過程になることを示す。

条件 (L) : $\Im\zeta\ne0$ なる複素数 $\zeta\in\mathbf{C}$ に対して、$G_\Lambda(\zeta;x,y)$ を H_Λ の Green 関数、即ち $(H_\Lambda-\zeta)^{-1}$ の核とする。このとき定数 $0<s_0<1$, $C>0$, $m>0$ および $r>0$ があって任意の hypercube Λ に対して

$$E[|G_\Lambda(\zeta;x,y)|^{s_0}]\le Ce^{-m|x-y|}\ . \tag{62}$$

但し $\Im\zeta>0$ かつ $|\zeta-E|<r$. また $x,y\in\Lambda$ のうち一方は Λ の境界上にあるものとする。

この条件は disorder が大きい (いいかえると $\sup_t\rho(t)$ が小さい) かまたは E がスペクトルの端部に近いとき成り立つことがわかっている。(このこと、および条件 (L) が Anderson 局在の十分条件であることの証明については [1] , [7] を参照されたい。)

以上の仮定の下に

定理. $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$ とするとき点過程 $N^{\Lambda,E}$ は平均 $n(E)$ の Poisson 点過程に弱収束する。

この定理は次のようにして証明される。まず Λ は辺の長さ L の hypercube 、また $K_L = L^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ として Λ を K_L^α 個の cells $\{C_p\}_p$ に分割する。H_{C_p} の固有値を $\{E_j(C_p)\}_j$ とし、 $\{|\Lambda|(E_j(C_p) - E)\}_j$ の作る点過程を $N^{\Lambda,E,p}$ とすると、次が成り立つ：

1. 条件 (L) より、異なる cells の間には殆ど相互作用がないことが言える。従って $N^{\Lambda,E}$ は $\sum_p N^{\Lambda,E,p}$ で近似される。
2. ランダム・ポテンシャルに対する仮定から $\{N^{\Lambda,E,p}\}_p$ は互いに独立で、かつほぼ同分布である。
3. 先に注意したように各 $N^{\Lambda,E,p}$ は単純な点過程である。
4. 任意の有界区間 A に対して
$$E[N^{\Lambda,E,p}(A)] \sim K_L^{-d}|A|n(E)$$
5. 同じく任意の有界区間 A に対して
$$E[N^{\Lambda,E,p}(A)\{N^{\Lambda,E,p}(A) - 1\}] = \mathcal{O}(K_L^{-2d})\ .$$

こうして前節の最後に述べた状況が実現し、定理の主張が得られるのである。

5　定常な点過程。その準位統計への応用。

点過程 N が定常とは、次に述べるように N を任意に平行移動したもの $N(\cdot + t)$ の確率分布が N のそれと変わらないことである。３節で扱った Poisson 点過程はその例になっている。

準位統計においてはハミルトニアンのスペクトルの "揺らぎ" が研究されるが、それが問題として成立するためにはまず、ハミルトニアンのスペクトルが少なくとも局所的には定常な点過程と見なされる、というフィクションが成立しなければならない。実際、準位に対する "統計操作" はランダム・ハミルトニアンのアンサンブル上で行われるよりも、スペクトルの個々の実現についてエネルギー軸上で行われることが多いが、このことは定常な点過程の持つエルゴード性（６、７節参照）を前提にしているというべきであろう。また準位統計の際に行われるいわゆる "unfolding" とはスペクトルを定常点過程に見えるようにするための下ごしらえに他ならない。

本節では定常な点過程の基本性質をエルゴード定理を用いない範囲で述べ、準位統計の基礎概念との関連を考察する。特に長谷川洋氏の著書 [24] に解説してある $E(k,S)$,

$F(k,S)$ 等の間の関係式が概ね Palm-Khinchin の等式と呼ばれるものから得られることを示す。本節の前半は Daley, Vere-Jones の書 [6] に沿っている。

定義. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された点過程 $N = N_\omega$ が定常 (stationary) とは、任意の自然数 r 、任意の有限区間 $I_1, \ldots, I_r$ および任意の非負整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して確率の値

$$P(N(t+I_j) = k_j \ , \ j = 1, \ldots, r) \tag{63}$$

が t に依存しないことである。但し $t + I_j$ は区間 I_j を t だけずらしたもの。

２節に述べたように点過程 N の確率分布は

$$P(N(I_j) = k_j \ , \ j = 1, \ldots, r) \tag{64}$$

の形の確率の値の全体のことである。従って今述べた N の定常性の定義は N の確率分布が平行移動の下で不変であること、と要約される。

この定義から直接導かれる性質をいくつか挙げる。以下

$$m \equiv E[N(0,1]] < \infty \tag{65}$$

を仮定する。

命題 5.1 任意の実数 t および $x \geq 0$ に対して

$$E[N(t,t+x]] = mx \ . \tag{66}$$

この意味で m は点過程 N の平均密度 (mean density) と呼ばれる。

実際 N の定常性から $E[N(t,t+x]] = E[N(0,x]]$. そこで $M(x) = E[N(0,x]]$ とおくと任意の $x, y \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} M(x+y) &= E[N(0,x+y]] = E[N(0,x]] + E[N(x,x+y]] \\ &= M(x) + M(y) \end{aligned}$$

ところが関数方程式 $M(x+y) = M(x) + M(y)$ を満たして、$M(x) \geq 0$, $M(1) = m$ となる関数は $M(x) = mx$ に限られることが知られている。(証明については例えば Kestelman [9] をみられたい。もっとも $M(x)$ が右連続なことに注意すれば証明はもっと容易である。)

命題 5.2 極限値

$$\lambda = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(N(0,h] > 0) \tag{67}$$

が存在して $\lambda \leq m$. この λ を定常点過程 N の intensity と呼ぶ。

この種の極限定理の証明には次の一般的な補題がくりかえし用いられる：

補題. $g(x)$ が $x \geq 0$ に対して定義された関数で、２つの条件

1. $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$;
2. $g(x+y) \le g(x) + g(y) \quad (x, y > 0)$.

を満たすならば、極限

$$\alpha = \lim_{x\to 0} g(x)/x \ \le \infty$$

が存在して

$$\alpha = \sup_{x>0} \ g(x)/x \ .$$

となる。

例えば 命題 5.2 を証明するために関数 $\phi(x) = P(N(0,x] > 0)$ を導入すると、これは補題の条件を満たし、さらに

$$\phi(x) \le mx \tag{68}$$

となる。これにより極限値 λ は存在して $\lambda \le m$ となる。

命題 5.3 定常点過程 N が単純ならば $\lambda = m$.

証明は省略する。

一般の定常な点過程 N が与えられたとき、その点の重複度を 1 とおくことにより新しく単純点過程 N^* が得られる。明らかに N^* は N と同じ intensity λ を持つが、命題 5.3 によりそれは N^* の mean density に等しい。

命題 5.4 定常点過程 N が単純であるための必要十分条件は

$$P(N(0,h] \ge 2) = o(h) \quad , \ h \downarrow 0 \ . \tag{69}$$

3.1 節で予告したようにこの判定条件により定常な Poisson 点過程（その平均を λ とする）が単純であることがわかる。実際 N が Poisson ならば $h \downarrow 0$ とするとき

$$P(N(0,h] \ge 2) = e^{-\lambda h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}(\lambda h) = o(h^2) \tag{70}$$

である。

命題 5.5 $k = 1, 2, \ldots$ に対して極限値

$$\pi_k \equiv \lim_{h\downarrow 0} P(N(0,h] = k \mid N(0,h] > 0) \tag{71}$$

が存在して $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1$.

π_k の直感的な意味は "原点に点過程 N の点があるときその重複度が k である確率" と考えられる。

命題 5.6 $x > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して、極限値

$$Q_k(x) = \lim_{h \downarrow 0} P(N(0, x] \le k \mid N(-h, 0] > 0) \tag{72}$$

が存在し、x の関数として右連続かつ非増加。

命題 5.7 (Palm-Khinchin の等式)
定常な点過程 N が単純（従って $\lambda = m$ ）かつ確率 1 で条件

$$N_\omega(-\infty, 0] = N_\omega(0, \infty) = \infty \tag{73}$$

を満たすとする。また $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$q_k(x) = Q_k(x) - Q_{k-1}(x) = \lim_{h \downarrow 0} P(N(0, x] = k \mid N(-h, 0] > 0) \tag{74}$$

（但し $Q_{-1}(x) \equiv 0$ ）とおく。このとき

$$P(N(0, x] \le k) = \lambda \int_x^\infty q_k(u) du \quad , \; k = 0, 1, \ldots \tag{75}$$

が成立する。さらに

$$R_k(x) \equiv 1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j(x) \tag{76}$$

は $(0, \infty)$ 上の確率分布関数となり、$k = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\int_0^\infty x dR_k(x) = \frac{k}{\lambda} \tag{77}$$

命題 5.3-命題 5.6 と同様この定理の証明も Daley–Vere-Jones [6] にゆずるが、$R_k(x)$ が確率分布関数になること、即ち

$$\lim_{x \to \infty} R_k(x) = 1 \tag{78}$$

となることが (73) の帰結であることに注意しておく。実際、直感的には

$$R_k(x) = 1 - P(N(0, x] \le k - 1 \mid N(\{0\}) > 0) = P(N(0, x] \ge k \mid N(\{0\}) > 0)$$

と考えられるが、ここで $x \to \infty$ とすれば

$$R_k(\infty) = P(N(0, \infty) \ge k \mid N(\{0\}) > 0) .$$

ところが条件によればこの確率は任意の $k = 1, 2, \ldots$ に対して 1 となるはずである。

準位統計への応用

準位統計においては次のような "確率" が問題になる ([24])。但し考察の対象となるハミルトニアンのスペクトルは単純な定常点過程 N により表されているとする。

- $$E(k,S) \equiv P(N(0,S] = k)\ ; \tag{79}$$

- $$F(k,S) \equiv P(N(0,S] = k \mid N(\{0\}) = 1)\ ; \tag{80}$$

- $$P(k,S) \equiv P(N(0,S) = k \mid N(\{0\}) = N(\{S\}) = 1)\ . \tag{81}$$

このうち $E(k,S)$ の定義には何ら問題点はないが、その次の 2 つの条件付確率には少し注意を要する。一般に単純かつ定常な点過程 N_ω に対しては 命題 5.1 で述べたように

$$P(N(\{0\}) = 1) = E[N(\{0\})] = m \cdot 0 = 0\ , \tag{82}$$

特に

$$P(N(\{0\}) = N(\{S\}) = 1) \leq P(N(\{0\}) = 1) = 0 \tag{83}$$

となるから (1-2) 節で注意したように条件付確率を確率の値の比で定義することはできない。そこで $F(k,S)$ の定義式は、$h > 0$ であるかぎり $P(N(-h,0] > 0) > 0$ となることに注意して

$$F(k,S) = \lim_{h \downarrow 0} P(N(0,S] = k \mid N(-h,0] > 0) = q_k(S) \tag{84}$$

を意味するものと理解する。このように考えても $P(k,S)$ の定義にはなお問題が残る。例えば N が等間隔に並んだ点のみから成り立っている場合を考えてみる。点の間隔を簡単のため 1 とすると、S が整数でないときは十分小さなすべての $h > 0$ に対して

$$P(N(-h,0] > 0\ ,\ N(S,S+h] > 0) = 0 \tag{85}$$

であるから

$$P(h,S) = \lim_{h \downarrow 0} P(N(0,S) = k \mid N(-h,0] > 0\ ,\ N(S,S+h] > 0) \tag{86}$$

のように定義することさえ不可能になってしまう。そこで、ここでは $P(k,S)$ を条件付確率として定義することは断念して、$P(k,S)$ が満たすとされる関係式

$$P(k,S) = -\frac{d}{dS}\sum_{j=0}^{k} F(j,S) = -\frac{d}{dS} Q_k(S) \tag{87}$$

により逆に $P(k,S)$ を定義する。ただしこの場合も $Q_k(S)$ が微分可能とは限らないので、測度あるいは超関数の意味で

$$P(k,S)dS = -dQ_k(S) \tag{88}$$

と考える。

まず Palm-Khinchin の等式により $k \geq 1$ に対しては

$$E(k,S) = P(N(0,S] \leq k) - P(N(0,S] \leq k-1) \tag{89}$$
$$= \lambda \int_S^\infty \{q_k(x) - q_{k-1}(x)\} dx \tag{90}$$
$$= \lambda \int_S^\infty \{F(k,x) - F(k-1,x)\} dx\ , \tag{91}$$

また

$$E(0,S) = \lambda \int_S^\infty F(0,x) dx \tag{92}$$

も成り立つ。ただし準位統計においては $\lambda = m = 1$ と規格化されていることに注意する。$F(k,x)$ がさらに x の連続関数だとすると、上の式から

$$\frac{d}{dS} E(k;S) = \begin{cases} \lambda\{F(k-1,S) - F(k,S)\}\ , & k \geq 1 \\ -\lambda F(0,S)\ , & k = 0 \end{cases} \tag{93}$$

を得る。

さらに次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{n=0}^\infty E(n,S) = \sum_{n=0}^\infty P(N(0,S] = n) = 1\ ; \tag{94}$$

$$\sum_{n=0}^\infty F(n,S) = 1\ ; \tag{95}$$

$$\int_0^\infty P(k,S) dS = -\int_0^\infty dQ_k(S) = Q_k(0) = 1\ ; \tag{96}$$

$$\int_0^\infty F(k,S) ds = \int_0^\infty q_k(S) dS = \frac{1}{\lambda} P(N(0,0] \leq 0) = \frac{1}{\lambda}\ . \tag{97}$$

第４の式の最後の等号は、区間 $(0,0]$ が空であることから常に $N_\omega(0,0] = 0$ となることによる。第２の等式の証明は次の通りである：$F(n,S) = q_n(S) = Q_n(S) - Q_{n-1}(S)$ により

$$\sum_{n=0}^\infty F(n,S) = \sup_n Q_n(S)$$

一方 $Q_n(S)$ の定義 (命題 5.6) と $P(N_\omega(-h,0] > 0) \sim \lambda h$ および補題より

$$Q_n(S) = \sup_{h>0} \frac{1}{\lambda h} P(N(0,x] \leq n\ ,\ N(-h,0] > 0) \tag{98}$$

$\sup_n$ と $\sup_{h>0}$ を交換して 命題 5.2 に注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F(n;S) &= \sup_h \frac{1}{\lambda h} P(N(0,x] < \infty\ ,\ N(-h,0] > 0) \\ &= \sup_h \frac{1}{\lambda h} P(N(-h,0] > 0) \\ &= 1\end{aligned}$$

を得る。

最後に 命題 5.7 の最後の部分から

$$\int_0^\infty SP(k,S)dS = \int_0^\infty S(-dQ_k(S)) = \int_0^\infty SdR_{k+1}(S) = \frac{k+1}{\lambda}\ . \tag{99}$$

簡単な具体例を２つ考察する。

(a) 平均 λ の定常 Poisson 点過程 N .

これについては $N(0,x]$ と $N(-h,0]$ の独立性から

$$Q_k(x) = \lim_{h\downarrow 0} P(N(0,x] \le k \mid N(-h,0] > 0) = P(N(0,x] \le k)\ ; \tag{100}$$

$$q_k(x) = Q_k(x) - Q_{k-1}(x) = P(N(0,x] = k) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\ . \tag{101}$$

これにより Palm-Khinchin の等式は直接計算により確かめられる。またこの場合

$$E(k,S) = e^{-\lambda S}\frac{(\lambda S)^k}{k!} = F(k,S)\ ; \tag{102}$$

$$P(k;S) = -\frac{d}{dS}Q_k(S) = \lambda e^{-\lambda S}\frac{(\lambda S)^k}{k!}\ . \tag{103}$$

である。

(b) 確率空間、確率測度として $\Omega = [0,1)$, $P(d\omega) = d\omega$ （Lesbesgue 測度）をとり、

$$N_\omega(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n-\omega}(\cdot) \tag{104}$$

なる点過程を考えると、N は定常であって N の各点はすべて等間隔 (=1) に並んでいる。

さて $0 \le x < j+1$ かつ $h > 0$ が十分小ならば、$N_\omega(-h,0] > 0$ なる限り常に $N_\omega(0,x] \le j$ である。また $x \ge j+1$ ならば $N_\omega(-h,0] > 0$ なる限り常に $N_\omega(0,x] > j$ となる。一方 $P(N_\omega(-h,x] > 0) = h$, $(h < 1)$ （特に $\lambda = 1$ ）だから

$$Q_j(x) = \begin{cases} 1, & x < j+1 \\ 0, & x \ge j+1 \end{cases} \tag{105}$$

従って $q_j(x) = 1_{[j,j+1)}(x)$ となる。また

$$P(k,S) = -\frac{d}{dS}Q_k(S) = \delta(S-k-1) \tag{106}$$

である。

6　エルゴード的な点過程

$\mathbf{R}$ の点 x を左に t だけずらす変換を τ_t とする。即ち $\tau_t x = x - t$. また $\mathbf{R}$ 上の点配置 $N = (\xi, m_\xi) \in Q$ に対して、点配置 $\tau_t N \in Q$ を

$$(\tau_t N)(f) = N(f \circ \tau_t) = \sum_{x \in \xi} m_\xi(x) f(x-t) = \sum_{y \in \xi - t} m_{\xi - t}(y) f(y) \tag{107}$$

により定義する。τ_t により点配置 N は全体として左に t だけずれることになる。

さて点過程 $N = N_\omega$ が定義されている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に flow $\{\theta_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ が備わっているとする。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$N_{\theta_t \omega} = \tau_t N_\omega \tag{108}$$

が成り立つとき点過程は $\{\theta_t\}-$ 定常であるということにする。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の変換 θ_t が確率測度 P を保存することから $\{\theta_t\}-$ 定常な点過程 N は前節の意味で定常であることがわかる。逆に点過程 N が前節の意味で定常とすると flow $\{\theta'_t\}$ を備えた確率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ およびその上で定義された $\{\theta'_t\}-$ 定常な点過程 $N' = N'_{\omega'}$ が存在して N と N' は同じ確率分布に従う。以後エルゴード定理を有効に用いたり Palm 測度に関する諸定理を明解にするため $\{\theta_t\}-$ 定常な点過程に考察を限るが、今述べたことから、そのようにしても一般性が失われるわけではない。

今後 flow $\{\theta_t\}$ はエルゴード的であると仮定する。また前節同様

$$m = E[N(0,1]] < \infty \tag{109}$$

も仮定する。

定常な Poisson 点過程を（必要ならば確率空間を取り換えることにより）$\{\theta_t\}-$ 定常な点過程とみなすことができるが、さらに $\{\theta_t\}$ がエルゴード的であるようにもできる。また前節の最後の例 (b) において $\Omega = [0,1)$ の変換 θ_t を

$$\theta_t \omega = \{\omega + t\} \quad , \omega \in [0,1) \tag{110}$$

により定義する（ただし $\{a\}$ は a の小数部分）と、$\{\theta_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ はエルゴード的な flow になることはよく知られている。そして N_ω は $\{\theta_t\}-$ 定常である。

本節の残りでエルゴード的な点過程の簡単な性質をいくつか挙げる。Palm 測度の詳しい説明は次節に行う。

命題 6.1 確率 1 で

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}N_\omega(0,x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}N_\omega(x,0]=m\ . \tag{111}$$

従って $m>0$ ならば確率 1 で

$$N_\omega(-\infty,0]=N_\omega(0,\infty)=\infty \tag{112}$$

となり、Palm-Khinchin の等式の成立条件が満たされる。

証明。$x=n=1,2,\ldots$ ならば

$$N_\omega(0,x]=N_\omega(0,n]=\sum_{j=0}^{n-1}N_\omega(j,j+1]=\sum_{j=0}^{n-1}(\tau_jN_\omega)(0,1]=\sum_{j=0}^{n-1}N_{\theta_j\omega}(0,1]\ .$$

従って確率変数 $f(\omega)=N_\omega(0,1]$ と automorphism θ_1 に対してエルゴード定理を適用すると、確率 1 で極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_\omega(0,n]=M(\omega)$$

が存在して $E[M]=E[N(0,1]]=m$ となる。

つぎに任意の $x>0$ に対して、自然数 n を $n\le x\le n+1$ のようにとると、

$$\frac{n}{x}\frac{N_\omega(0,n]}{n}\le\frac{N_\omega(0,x]}{x}\le\frac{n+1}{x}\frac{N_\omega(0,n+1]}{n+1}$$

$x\to\infty$ とすると $n\to\infty$ かつ $n/x\to 1$ となるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_\omega(0,x]}{x}=M(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_\omega(0,n]}{n}$$

となる。一方任意の $t\in\mathbf{R}$ に対し、

$$M(\theta_t\omega)=\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\theta_t\omega}(0,x]}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{N_\omega(t,t+x]}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{N_\omega(0,x]}{x}=M(\omega)\ .$$

従って $M(\omega)$ は flow $\{\theta_t\}$ に関する不変関数となり、$\{\theta_t\}$ のエルゴード性から $M(\omega)=C=$ 定数 である。ところが $E[M]=m$ より実は $C=m$. (証明終わり。)

命題 6.2 $I_1,\ldots,I_n\in\mathbf{R}$ は互いに素な有界区間、$k_1,\ldots,k_n$ は非負整数とし、実数の集合

$$F_T^\omega=\{t\in(0,T]\mid N_\omega(t+I_j)=k_j\ ,\ j=1,\ldots,n\} \tag{113}$$

を考える。このとき確率 1 で

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|F_T^\omega| = P(N(I_j)=k_j\ ,\ j=1,\ldots,n)\ . \tag{114}$$

証明。 事象

$$A=\{\omega\in\Omega \mid N_\omega(I_j)=k_j\ ,\ j=1,\ldots,n\}$$

を考えると $0\le t\le T$ に対して

$$t\in F_T^\omega \ \Leftrightarrow\ \theta_t\omega\in A\ .$$

従って

$$|F_T^\omega| = \int_0^T 1_{F_T^\omega}(t)dt = \int_0^T 1_A(\theta_t\omega)dt$$

となるからエルゴード定理により確率 1 で

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|F_T^\omega| = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T 1_A(\theta_t\omega)dt = E[1_A]=P(A)\ .$$

(証明終わり。)

この定理により、エルゴード的な点過程の典型的な実現 が一つ与えられると、もとの点過程の確率分布が復元されることがわかる。5 節の始めに述べたように、準位に対する統計をエネルギー軸上でとることの正当性はこの事実に基づいている。

命題 6.3 $E[\{N(0,1]\}^2]<\infty$ ならば $V(N(0,x])$ は任意の $x>0$ に対して定義できるが、さらに

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}V(N(0,x])=0\ . \tag{115}$$

となる。

証明。$x=n=1,2,\ldots$ の場合を考えると、平均エルゴード定理によって $x=n\to\infty$ とするとき

$$\frac{1}{n^2}V(N(0,n])=E[\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}N_{\theta_j\omega}(0,1]-m\}^2]\longrightarrow 0\ .$$

この主張が一般の $x\to\infty$ に対しても成り立つことは 命題 6.1 と同様の議論により示すことができる。

$V(N(0,x])$ は準位統計では $\Sigma^2(x)$ と書かれ、number variance と呼ばれている。この定理によると例えば $\Sigma^2(x)=x^2$ となるようなエルゴード的点過程は存在しないことがわかる。

平均 λ の定常 Poisson 点過程の場合は

$$V(N(0,x]) = \Sigma^2(x) = \lambda x \ . \tag{116}$$

また等間隔な点配置から成る点過程については

$$V(N(0,x]) = \Sigma^2(x) = \{x\}(1-\{x\}) \tag{117}$$

となる。($\{x\}$ は x の小数部分。$\{x\} = x - [x]$)

N が単純のとき $V(N(0,x])$ と, Palm-Khinchin の等式に現れる $q_k(x)$ との間には次の関係が成り立つ（証明は Daley–Vere-Jones [6] にある）:

$$V(N(0,x]) = mx - (mx)^2 + 2m\int_0^x (\sum_{k=1}^{\infty} kq_k(u))du \ , \tag{118}$$

いいかえると

$$\Sigma^2(x) = mx - (mx)^2 + 2m\int_0^x (\sum_{k=1}^{\infty} kF(k;u))du \ . \tag{119}$$

さてこの第２の式をさらに書き換えてみよう。

$$P(k;x)dx = -\sum_{j=0}^{k} dF(j;x) \tag{120}$$

より

$$\int_0^r P(k;x)dx = -\sum_{j=0}^{k} F(j;r) + 1 \tag{121}$$

従って $k \geq 1$ に対して

$$F(k;r) = -\int_0^r \{P(k;x) - P(k-1;x)\}dx \tag{122}$$

故に

$$\sum_{k=1}^{\infty} kF(k;r) = -\int_0^r \sum_{k=1}^{\infty} k\{P(k;x) - P(k-1;x)\}dx = \int_0^r \sum_{k=0}^{\infty} P(k;x)dx \tag{123}$$

これを上の式に代入すれば

$$\Sigma^2(x) = mx - (mx)^2 + 2m\int_0^x (x-r)\sum_{k=0}^{\infty} P(k;r)dr \tag{124}$$

を得る。この式は $m=1$ のとき [24] の (4.5) 式と同じになる。

7 Palm 測度、定常点過程の構造、間隔分布

前節同様、点過程 $N = N_\omega$ が定義されている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に flow $\{\theta_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ が与えられていて、N_ω は $\{\theta_t\}-$ 定常であるとする。このとき $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に Palm 測度と呼ばれる測度 $\hat{P}(d\omega)$ が存在する。$\hat{P}$ は一般に確率測度にはならないが、点過程 N が単純で、平均密度 $m = E[N(0,1]] = 1$ のときには $N(\{0\}) = 1$ という条件の下での N の "条件付き確率法則" を与える。また Palm 測度を用いることにより定常な点過程の構造が明らかになり、"間隔分布" の意味もはっきりする。尚、本節の記述は主に J. Neveu の講義録 [16] によった。

まず Palm 測度の定義と存在を同時に示す基本定理を述べる。(これは多次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ 上の定常な点過程についても成立するものである。)

命題 7.1 $N = N_\omega$ が $\{\theta_t\}-$ 定常な $\mathbf{R}$ 上の点過程ならば $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 $\hat{P}(d\omega)$ で次の条件を満たすものが存在する。この $\hat{P}$ を点過程 N に対する Palm 測度と呼ぶ：

$\Omega \times \mathbf{R}$ 上の任意の可測関数 $f(\omega, s) \geq 0$ に対して

$$\int_\Omega P(d\omega) \int_\mathbf{R} N_\omega(ds) f(\theta_s\omega, s) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int_\mathbf{R} ds f(\omega, s) . \tag{125}$$

$f(\omega, s) = g(\theta_{-s}\omega, s)$ と置き換えれば、この条件は次と同値である：$\Omega \times \mathbf{R}$ 上の任意の可測関数 $g(\omega, s) \geq 0$ に対して

$$\int_\Omega P(d\omega) \int_\mathbf{R} N_\omega(ds) g(\omega, s) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int_\mathbf{R} ds g(\theta_{-s}\omega, s) . \tag{126}$$

(ただし $\int N(\omega, ds) F(s) = N_\omega(F)$ である。)

以下この定理を認めて話を進める。

命題 7.1 において $g(\omega, s) = 1_A(s)$, $A \subset \mathbf{R}$ ととると

$$\int_\Omega P(d\omega) \int_\mathbf{R} N_\omega(ds) 1_A(s) = \int_\Omega P(d\omega) N_\omega(A) = E[N(A)] ;$$

$$\int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int_\mathbf{R} ds 1_A(s) = |A| \hat{P}(\Omega) .$$

従って、特に $A = (0,1]$ として

命題 7.2

$$m = E[N(0,1]] = \hat{P}(\Omega) . \tag{127}$$

従って $m = 1$ の場合を除けば $\hat{P}$ は確率測度ではない。以下今までと同様 $m < \infty$ を仮定すると $\hat{P}$ は有限な測度になる。

命題 7.3 $\hat{P}$ は Ω の部分集合

$$\hat{\Omega} \equiv \{\omega \in \Omega \mid N_\omega(\{0\}) > 0\} \tag{128}$$

の上に集中している。

これを示すために $\mathbf{R}$ 上の関数 $u(s)$ で、$u(s) > 0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} u(s)ds = 1$ となるものを一つとる。すると $k = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned}
\hat{P}(N(\{0\}) = k) &= \int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int_{\mathbf{R}} ds 1_{\{N_\omega(\{0\})=k\}} u(s) \\
&= \int_\Omega P(d\omega) \int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds) 1_{\{N_{\theta_s\omega}(\{0\})=k\}} u(s) \\
&= \int_\Omega P(d\omega) \int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds) 1_{\{N_\omega(\{s\})=k\}} u(s) \;.
\end{aligned}$$

ここで $k = 0$ ととると $N_\omega(\{s\}) > 0$ となる点 s において $1_{\{N_\omega(\{s\})=0\}} = 0$ となるから上式の右辺 $= 0$ となる。従って $\hat{P}(N_\omega(\{0\}) = 0) = 0$, 即ち $\hat{P}(\hat{\Omega}^c) = 0$. さらに点過程 N が単純ならば同様の議論により

$$\hat{P}(N(\{0\}) \geq 2) = \int_\Omega P(d\omega) \int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds) 1_{\{N_\omega(\{s\}) \geq 2\}} u(s) = 0$$

となり $\hat{P}$ は $\hat{\Omega}$ の部分集合

$$\hat{\Omega}_1 = \{\omega \in \Omega \mid N_\omega(\{0\}) = 1\} \tag{129}$$

の上に集中していることがわかる。一方、定常な点過程に対しては一般に

$$P(N_\omega(\{x\}) > 0) = 0 \;, \quad x \in \mathbf{R} \tag{130}$$

となるから $P(\hat{\Omega}) = 0$ である。即ち Ω 上の 2 つの測度 P と $\hat{P}$ は互いに特異である。

命題 7.4 N は単純で $m = \hat{P}(\Omega) < \infty$ とする。このとき compact support を持つ任意の連続関数 $\varphi \geq 0$ に対して、

$$\frac{1}{\hat{P}(\Omega)} \int_\Omega \exp(-N_\omega(\varphi)) \hat{P}(d\omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\Omega \exp(-N_\omega(\varphi)) P(d\omega | N(-\epsilon, \epsilon) > 0) \tag{131}$$

となる。

$m = \hat{P}(\Omega) = 1$ のときこの等式の左辺は確率法則 $\hat{P}$ に従う点過程の Laplace 汎関数を表している。一方、右辺は条件付き確率法則 $P(\cdot | N(-\epsilon, \epsilon) > 0)$ の下での Laplace 汎関数の極限を表している。Laplace 汎関数は点過程の確率分布を一意に決めるから直感的には

$$\hat{P}(\cdot) = P(\cdot | N(\{0\}) > 0) \tag{132}$$

と考えてよい。

証明の概略： $h(\omega) \equiv \exp(-N_\omega(\varphi))$ とおくと $h(\theta_t\omega) = \exp(-N_\omega(\varphi \circ \tau_t))$ は t について連続になる。従って (126) において $g(\omega, s) = h(\omega)1_{(-\epsilon,\epsilon)}(s)$ とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega P(d\omega)h(\omega)N_\omega(-\epsilon,\epsilon) &= \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega \hat{P}(d\omega)\int_{\mathbf{R}} ds 1_{(-\epsilon,\epsilon)}(s)h(\theta_{-s}\omega) \\ &\longrightarrow \int_\Omega \hat{P}(d\omega)h(\omega)\,, \quad (\epsilon \downarrow 0) \end{aligned}$$

となる。一方 N が単純ならば、命題 5.4 により、左辺の $N_\omega(-\epsilon,\epsilon)$ を $1_{\{N_\omega(-\epsilon,\epsilon)>0\}}$ で置き換えることによる誤差は $\epsilon \downarrow 0$ の極限では無視できるから

$$\int_\Omega \hat{P}(d\omega)h(\omega) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega P(d\omega)h(\omega)1_{\{N_\omega(-\epsilon,\epsilon)>0\}}\,.$$

特に $\varphi \equiv 0$ ととると $h(\omega) \equiv 1$ となり

$$\hat{P}(\Omega) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}P(N(-\epsilon,\epsilon) > 0)$$

を得る。これを再び上式に持ち込むと

$$\frac{1}{\hat{P}(\Omega)}\int_\Omega \hat{P}(d\omega)h(\omega) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\Omega h(\omega)P(d\omega|N(-\epsilon,\epsilon) > 0)$$

が得られる。

改めて点過程 N_ω は単純かつ $\{\theta_t\}$− 定常で、flow $\{\theta_t\}$ はエルゴード的とする。このとき命題 6.1 によって、$m > 0$ なる限り確率 1 で

$$N_\omega(-\infty, 0] = N_\omega(0,\infty) = \infty \tag{133}$$

となる。従って点過程 N_ω は

$$\cdots < T_{-2}(\omega) < T_{-1}(\omega) < T_0(\omega) \le 0 < T_1(\omega) < T_2(\omega) < \cdots \tag{134}$$

を満たす点列 $\{T_n(\omega)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ によって

$$N_\omega(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{T_n(\omega)}(\cdot) \tag{135}$$

と表現される。

$$\hat{\Omega} = \{\omega \mid N_\omega(\{0\}) > 0\} = \{\omega\ ;\ T_0(\omega) = 0\} \tag{136}$$

とすると 命題 7.3 により N_ω の Palm 測度 $\hat{P}$ は $\hat{\Omega}$ の上に集中している。$T_0(\omega)$ を用いると Palm 測度の基本定理 (命題 7.1) は次のようにも述べられる：

命題 7.5 $\Omega \times [0, \infty)$ 上の任意の可測関数 $g(\omega, s) \geq 0$ に対して
(i)
$$\int_\Omega P(d\omega) g(\theta_{T_0(\omega)}\omega, -T_0(\omega)) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} dsg(\omega, s) \ . \tag{137}$$
特に $g(\omega, s) = f(\omega)$ とすると
(ii)
$$\int_\Omega P(d\omega) f(\theta_{T_0(\omega)}\omega) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) T_1(\omega) f(\omega) \ . \tag{138}$$
また $g(\omega, s) = f(\theta_s\omega)$ とすると $g(\theta_{T_0(\omega)}\omega, -T_0(\omega)) = f(\omega)$ に注意して
(iii)
$$\int_\Omega P(d\omega) f(\omega) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} dsf(\theta_s\omega) \ . \tag{139}$$

(i) の証明：$a_0(\omega, s) = 1_{\{T_0(\omega) \leq s < T_1(\omega)\}}$ なる関数を考えると、$a_0(\theta_s\omega, -s) = a_0(\omega, s)$ が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} a_0(\theta_s\omega, -s) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad T_0(\theta_s\omega) \leq -s < T_1(\theta_s\omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad T_0(\theta_s\omega) + s \leq 0 < T_1(\theta_s\omega) + s \\ &\Longleftrightarrow \quad T_0(\omega) \leq s < T_1(\omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad a_0(\omega, s) = 1 \end{aligned}$$

そこで (125) において
$$f(\omega, s) = a_0(\omega, -s) g(\omega, -s)$$
ととると
$$\int_\Omega P(d\omega) \int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds) a_0(\theta_s\omega, -s) g(\theta_s\omega, -s) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int_{\mathbf{R}} dsa_0(\omega, -s) g(\omega, -s)$$
ところが $a_0(\theta_s\omega, -s) = a_0(\omega, s)$ より $\omega \in \Omega$ に対して
$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds) a_0(\theta_s\omega, -s) g(\theta_s\omega, -s) &= \int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds) a_0(\omega, s) g(\theta_s\omega, -s) \\ &= g(\theta_{T_0(\omega)}\omega, -T_0(\omega)) \end{aligned}$$

また $\omega \in \hat{\Omega}$ に対しては $T_0(\omega) = 0$ だから
$$\int_{\mathbf{R}} dsa_0(\omega, -s) g(\omega, -s) = \int_0^{T_1(\omega)} dsg(\omega, s)$$

となり、従って (i) が成り立つ。

$T_1 - T_0$, T_0 の確率分布については次の公式がなりたつ：

命題 7.6 半直線 $(0,\infty)$ 上の測度 $\hat{F}(dv)$ を

$$\hat{F}(A) = \hat{P}(T_1(\omega) \in A) , \quad A \subset (0,\infty) \tag{140}$$

により定義すると

(0)

$$\int_0^\infty v\hat{F}(dv) = 1 ; \tag{141}$$

(i)

$$P(T_1 - T_0 \in dv , -T_0 \in ds) = \hat{F}(dv)1_{[0,v)}(s)ds ; \tag{142}$$

(ii)

$$P(T_1 - T_0 \in dv) = v\hat{F}(dv) ; \tag{143}$$

(iii)

$$P(-T_0 \in ds) = P(T_1 \in ds) = p(s)ds , \text{ 但し } p(s) = \hat{F}((s,\infty)) . \tag{144}$$

証明： まず (i) を証明する。$h(v,s) \geq 0$ を $[0,\infty) \times [0,\infty)$ 上の任意の可測関数とする。 $g(\omega,s) = h(T_1(\omega),s)$ として命題 7.5-(i) を適用すると $T_1(\theta_{T_0(\omega)}\omega) = T_1(\omega) - T_0(\omega)$ だから

$$\int_\Omega P(d\omega)h(T_1(\omega) - T_0(\omega), -T_0(\omega)) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega)\int_0^{T_1(\omega)} dsh(T_1(\omega),s) .$$

いいかえると

$$\int\int h(v,s)P(T_1 - T_0 \in dv, -T_0 \in ds) = \int\int h(v,s)\hat{F}(dv)1_{[0,v)}(s)ds .$$

関数 $h(v,s)$ は任意だからこの等式は (i) を示している。また $h \equiv 1$ ととると、(0) がわかる。

上の式において $h(v,s) = g(v)$ とすると（$g \geq 0$ は $[0,\infty)$ 上の任意の可測関数）

$$\int g(v)P(T_1 - T_0 \in dv) = \int g(v)v\hat{F}(dv) .$$

(ii) はこれより得られる。また $h(v,s)=g(s)$ とすると $1_{[0,v)}(s)=1_{(s,\infty)}(v)$ に注意して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)P(-T_0\in ds) &= \int\int g(s)1_{(s,\infty)}(v)\hat{F}(dv)ds \\ &= \int_0^\infty g(s)\hat{F}(s,\infty)ds\ .\end{aligned}$$

さらに $h(v,s)=g(v-s)1_{[0,v)}(s)$ ととると、

$$\int_0^\infty g(u)P(T_1\in du)=\int_0^\infty ds\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)1_{(s,\infty)}(T_1(\omega))g(T_1(\omega)-s)$$

が得られるが、特に $g(u)=1_{(x,\infty)}(u)$ とすると、

$$\begin{aligned}P(T_1>x) &= \int_0^\infty ds\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)1_{(s+x,\infty)}(T_1(\omega)) \\ &= \int_0^\infty \hat{P}(T_1>s+x)ds \\ &= \int_x^\infty \hat{P}(T_1>s)ds\ .\end{aligned}$$

(iii) はこれらの等式から得られる。特に T_1 および $-T_0$ の分布は常に密度関数を持っている。

命題 7.7 (エルゴード的点過程の構造) 点過程 $N_\omega=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{T_n(\omega)}$ は単純かつ $\{\theta_t\}$– 定常、かつ flow $\{\theta_t\}$ はエルゴード的とする。

$$\hat{\Omega}=\{\omega\in\Omega\mid N_\omega(\{0\})>0\}=\{\omega\in\Omega\mid T_0(\omega)=0\} \tag{145}$$

とすると、写像 $\theta_{T_n(\omega)}(\omega)$ は Ω を $\hat{\Omega}$ の上に写す。θ_{T_n} の $\hat{\Omega}$ への制限を $\hat{\theta}_n$ とすると $\{\hat{\theta}_n|n\in\mathbf{Z}\}$ は $(\hat{\Omega},\hat{P})$ 上の保測変換群をなし、automorphism $\hat{\theta}_1$ はエルゴード的である。逆に $\hat{P}$ が $\hat{\Omega}$ 上に集中した測度で

$$\int_{\hat{\Omega}}T_1(\omega)\hat{P}(d\omega)=1 \tag{146}$$

を満たし、さらに θ_{T_1} が $\hat{P}$ を保存するならば

$$\int_\Omega P(d\omega)f(\omega)=\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)\int_0^{T_1(\omega)}dsf(\theta_s\omega) \tag{147}$$

により定義される Ω 上の確率測度 P の下で点過程 N_ω は $\{\theta_t\}$– 定常となる。

証明はやや高度なので [16] あるいは [8] にゆずる。

この命題を用いると、与えられた間隔分布を持つ点過程をどのように構成すればよいかがわかる。$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$ は確率空間とし、その上に定常な確率変数列 $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が与えられているとする。但し $\tau_n(\hat{\omega}) > 0$ であり、また τ_n $(n \in \mathbf{Z})$ は与えられた（共通の）確率分布に従い、$E[\tau_n] = 1$ とする。$T_n(\hat{\omega})$, $n \in \mathbf{Z}$ を

$$T_n(\hat{\omega}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \tau_j(\hat{\omega}), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\sum_{j=0}^{n+1} \tau_j(\hat{\omega}), & n < 0 \end{cases} \tag{148}$$

により定義する。最後に区間 $[0, T_1(\hat{\omega})) = [0, \tau_1(\hat{\omega}))$ から一様分布に従ってパラメータ s をランダムに選び、

$$N_{(\hat{\omega},s)}(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T_n(\hat{\omega}) - s - \cdot) \tag{149}$$

とすると $N_{(\hat{\omega},s)}$ は定常な点過程になる。このとき対応する確率空間は

$$\Omega \equiv \{\omega = (\hat{\omega}, s) \mid \hat{\omega} \in \hat{\Omega}\ ,\ s \in [0, \tau_1(\hat{\omega}))\} \tag{150}$$

である。さて確率変数 τ_n は与えられた確率分布に従うとしたが、異なる n に対する τ_n たちの間の相関のしかたは様々である。従って間隔分布を与えただけで点過程が一意に決まるわけではない。

$\{\tau_n\}$ が特に独立同分布のとき、上記のようにして得られる点過程を再生過程 (renewal process) という。Poisson 過程、等間隔の点配置からなる点過程はいずれも再生過程である。

さて、3 節で注意したように、点過程 N_ω が定常であっても、点の間隔の列 $\{\tau_n = T_n - T_{n-1}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ は定常な確率変数列とは限らない。Poisson 点過程の場合 τ_1 の分布は τ_n $(n \neq 1)$ の分布と異なるし、また τ_n $(n \neq 1)$ の分布と T_1 の分布も一般に異なる。上記の再生過程に話を限ると、

(a) τ_1 と τ_n $(n \neq 1)$ が同分布になるのは等間隔過程に限る；

(b) τ_n $(n \neq 1)$ と T_1 が同分布になるのは Poisson 点過程に限る。

実際、命題 7.6-(ii) より τ_1 と τ_n $(n \neq 1)$ が同分布ならば

$$\hat{F}(dv) = v\hat{F}(dv) \tag{151}$$

となるがこの等式を満たす $\hat{F}$ は点 1 に集中した $\delta-$ 分布に限られる。即ち $\tau_n = 1$ $(\forall n \neq 1)$ である。また T_1 と τ_n $(n \neq 1)$ が同分布ならば命題 7.6-(iii) より

$$\hat{F}(dv) = \hat{F}(v, \infty)dv\ .$$

これより $\hat{F}(dv)$ は密度 $p(v)$ を持つが、これについて

$$p(v)=\int_v^\infty p(s)ds\ ,\quad \text{従って}\ p'(v)=-p(v) \tag{152}$$

が成り立つ。即ち $p(v)=e^{-v}$ である。ところが、τ_n $(n\neq 1)$ が指数分布に従う再生過程は Poisson 点過程に限られる。

再生過程の場合、間隔の列 $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ の定常性の破れは τ_n $(n\neq 1)$ と τ_1 との分布の違いとして現れるのみだが、一般の定常点過程の場合は τ_n $(n\neq 1)$ がすべて異なる分布を持つこともあり得る。実際、$\tau_n(\omega)=\tau_n(\theta_{T_0}\omega)$ が成り立つから命題 7.5-(ii) より $c\geq 0$ に対して

$$P(\tau_n(\omega)>c)=P(\tau_n(\theta_{T_0}\omega)>c)=\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}T_1(\omega)1_{\{\tau_n(\omega)>c\}}\ . \tag{153}$$

となる。N_ω が再生過程でなければ T_1 と τ_n $(n\neq 1)$ の間には一般に $\hat{P}$ の下で相関があるから、上式右辺の値は n が異なればすべて異なるであろう。

上に述べたことから次の問題が生じる：エルゴード的な点過程の実現

$$\cdots<T_{-1}(\omega)<T_0(\omega)\leq 0<T_1(\omega)<T_2(\omega)<\cdots \tag{154}$$

が一つ観測されたとして、このデータから間隔分布を推定（あるいは測定）するにはどうすればよいだろうか。自然に思いつき、また準位統計において実行されてもいることは、$T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)$, $j=1,\ldots,n$ たちの測定値から一つのヒストグラムを描くことである。n を大きくしてゆくときそのヒストグラムがある曲線に近づくならば、それが間隔分布を表すと考えられそうである。数学的にいうと、任意の $c>0$ に対して極限値

$$G(c)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\{T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)\leq c\}} \tag{155}$$

が存在するならば、この $G(c)$ が間隔分布の分布関数を与えると考えるわけである。ところが今で注意したように T_j-T_{j-1} の分布が j に依存するならばこの極限値はいかにして存在するのだろうか。少なくとも大数の法則はそのままは適用されないだろうし、そもそも統計法則の異なるデータ $\{T_j-T_{j-1}\}$ をこのような形で混ぜ合わせること自体に意味があるのかどうかさえ疑問に思われる。にもかかわらず実は確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\{T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)\leq c\}}=\frac{1}{\hat{P}(\Omega)}\hat{P}(T_1\leq c) \tag{156}$$

となるのである。これを示すためにまず $\omega\in\hat{\Omega}$ に対して

$$T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)=T_1(\hat{\theta}_{j-1}\omega)\ ,\ j=1,2,\ldots \tag{157}$$

となることに注意する。命題 7.7 で述べたように、$\hat{\Omega}$ 上の確率 $\hat{P}(\cdot)/\hat{P}(\Omega)$ の下で変換群 $\{\hat{\theta}_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ はエルゴード的となるから、

$$A = \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{\{T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)\le c\}} = \frac{\hat{P}(T_1 \le 1)}{\hat{P}(\Omega)} \right\} ; \tag{158}$$

$$\hat{A} = A \cap \Omega \tag{159}$$

とするときエルゴード定理により

$$\hat{P}(\hat{A})/\hat{P}(\Omega) = 1 \tag{160}$$

となる。あとは $P(A) = 1$ を示せばよい。ところが

$$\omega \in A \Longleftrightarrow \theta_{T_0}\omega \in \hat{A} \tag{161}$$

だから、命題 7.5(ii) および命題 7.6-(0) により

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{\Omega} P(d\omega) 1_A(\omega) = \int_{\Omega} P(d\omega) 1_{\hat{A}}(\theta_{T_0}\omega) \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) T_1(\omega) 1_{\hat{A}}(\omega) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) T_1(\omega) = 1 \end{aligned}$$

今までの議論により、定常な点過程において間隔分布は Palm 測度を用いて定義されるべきものであることがわかった。これは準位統計において間隔分布が "エネルギー値 E に準位があるとしたときに次の準位が $E+S$ の近傍にある確率" として定義されていることを正当化している。

8　量子カオスにおける準位統計の数学的定式化について

本節では量子カオスにおける準位統計の定式化について初等的な考察を行う。特に regular spectrum に対する準位統計の問題と Sinai の格子点問題との関連について議論する。なお一次元系に対する準位統計の厳密な実行例については [14] を参照されたい。

8.1　話の起こり

束縛系 (bound system) を記述する量子ハミルトニアンのスペクトル (それは離散的になる) を、その系を古典的に記述する力学系が完全可積分であるかカオス的であるかに応じて regular spectrum と irregular spectrum とに分類することを提案したのは I.C. Percival である ([17])。Percival は 2 種のスペクトルの違いを, 主に系に摂動を加えた際

の反応の違いと見ていたようである。これに対し、M.V. Berry と M. Tabor ([3]) は系のエネルギー準位間の統計的な相関を見ることで 2 種のスペクトルは区別されると考えた。即ち彼らは次のように予想した。

1. regular spectrum においては準位の間には統計的な相関が見られない。典型的にはスペクトルは Poisson 過程のように見え、隣接する準位の間隔分布は $\lambda e^{-\lambda x}$ を密度とする指数分布に近い (準位集積 -level clustering)
2. irregular spectrum においては準位の間に強い相関がみられる。典型的にはスペクトルはランダム行列のスペクトルのように見え、隣接する準位の間隔分布は $\frac{\pi}{2}xe^{-(\pi/4)x^2}$ を密度とするいわゆる Wigner 分布に近い (準位反撥 -level repulsion)

Berry と Tabor が irregular spectrum とランダム行列のスペクトルとの間に類似性を予想した背景には、カオス的力学系がランダム性を自動生成すると考えられること、およびランダム行列が、複雑な内部構造を持つ原子核のスペクトルを統計的に記述するモデルとして成功を収めていたことがあると思われる。古典的にカオス的な系のエネルギー準位の間に反撥が見られることはその後の数値計算で確かめられているが (例えば [4])、ランダム行列との類似は完全なものではなく、問題は複雑である。また regular spectrum は上述の [3] において理論的、数値的に調べられているが、最も典型的な可積分系である調和振動子に対しては準位集積が見られない。従って Berry-Tabor の予想は文字どおりに受け入れられるものではなく、何らかの意味で generic な系に対してのみ成立するものと考えられるべきであろう。

8.2 準位統計の定式化の試み

Sinai ([20]) は Berry-Tabor の理論に示唆されて量子ハミルトニアンの準位統計に数学的定式化を与え、同時に regular spectrum における準位集積の裏付けとなるべき確率論の一定理を述べた。しかし Sinai の定式化は Berry-Tabor のアイディアをそのままなぞったものではない。ここでは Sinai の意味と Berry-Tabor の意味での準位統計についてそれぞれ掘り下げて考えてみたい。両者は本質的には同じものなのかもしれないし、また特別な場合には実際に一致してしまうが、今は一応区別して併記しておく。

8.2.1 Sinai の意味の準位統計

自由度 d の束縛系を考え、そのハミルトニアンを $H(\hbar)$ 、エネルギー準位を $\{E_n(\hbar)\}_{n\geq 0}$ とする。($\hbar$ は Planck 定数。) また $E_n(\hbar)$ はすべて縮退しないものとする。次のことを仮定しておく。(この仮定が満たされない場合の考察は将来の課題とする。)

仮定 1. ある $\gamma > 0$ が存在して

$$N_\hbar(E) \equiv \sharp\{n \mid E_n(\hbar) \le E\} \sim \gamma\hbar^{-d}E^{d/2} \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty)\ . \tag{162}$$

例（ビリヤード） 有界領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^d$ における Dirichlet Laplacian を Δ とし、$H(\hbar) = -\hbar^2\Delta$ とする。また $H(1)$ の固有値を $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ とすれば、$E_n(\hbar) = \hbar^2\lambda_n$ となる。従って

$$N_\hbar(E) = \sharp\{n \mid \lambda_n \le E/\hbar^2\ \} = N_1(E/\hbar^2)\ . \tag{163}$$

一方よく知られたようにある定数 c_d があって

$$N_1(\lambda) \sim c_d|\Omega|\lambda^{d/2} \quad (\lambda \to \infty) \tag{164}$$

であるから (Weyl の漸近公式)

$$N_\hbar(E) \sim c_d|\Omega|\hbar^{-d}E^{d/2} \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty) \tag{165}$$

となって仮定はみたされる。

上の仮定の下に "unfolded levels "$\lambda_n(\hbar) \equiv \gamma E_n(\hbar)^{d/2}$ を考えると

$$\tilde{N}_\hbar(\lambda) \equiv \sharp\{n \mid \lambda_n(\hbar) \le \lambda\ \} = \sharp\{\ n \mid E_n(\hbar) \le (\lambda/\gamma)^{2/d}\ \} \tag{166}$$

$$\sim \gamma\frac{1}{\hbar^d}(\lambda/\gamma) = \hbar^{-d}\lambda \quad (\lambda^{1/d}/\hbar \to \infty)\ . \tag{167}$$

従って $\hbar > 0$ を固定し、$\lambda \to \infty$ とした極限を考えると $\{\lambda_n(\hbar)\}_{n=1}^{\infty}$ は "密度 "$\hbar^{-d}$ で漸近的に一様分布していることがわかる。そこで区間 $I = (b_1, b_2) \subset (0, \infty)$, $c > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\mathcal{A}_k^I(\hbar; c) \equiv \{t \in I \mid (t, t + c\hbar^d] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } \lambda_n(\hbar) \text{ を含む } \} \tag{168}$$

なる集合を考える。

定義 1. 任意の $c > 0$, 任意の $k = 0, 1, \ldots$ に対して極限

$$\lim_{\hbar\downarrow 0}|\mathcal{A}_k^I(\hbar; c)| \equiv |I|\pi_k^I(c) \tag{169}$$

が存在するとき、"Sinai の意味の準位統計が可能 " ということにする。

さらに $c \ge 0$ に対して

$$n_\hbar^I(c) \equiv \sharp\{n \mid \lambda_n(\hbar) \in I\ ,\ \lambda_{n+1}(\hbar) - \lambda_n(\hbar) > c\hbar^d\ \} \tag{170}$$

とおく。準位の縮退はないと仮定しているから $n_\hbar^I(0)$ は I に含まれる $\lambda_n(\hbar)$ たちの総数を表す。

命題 8.1 Sinai の意味の準位統計が可能で、さらに $\pi_0^I(c)$ が $c>0$ について微分可能ならば、極限

$$\rho(c)=\rho^I(c)\equiv\lim_{\hbar\downarrow 0}\frac{n_\hbar^I(c)}{n_\hbar^I(0)} \tag{171}$$

が存在して $-(d/dc)\pi_0^I(c)$ に等しい。

証明. まず $n_\hbar^I(0)\sim|I|/\hbar^d$ に注意する。Δ は区間として、$\xi_\hbar(\Delta)=\sharp\{n|\ \lambda_n(\hbar)\in\Delta\}$ という記号を導入すると。

$$\begin{aligned}
&|\{t\in I|\ \xi_\hbar(t+\delta\hbar^d,t+c\hbar^d]=0\}|\ -\ |\{t\in I|\ \xi_\hbar(t,t+c\hbar^d]=0\}|\\
=\ &|\{t\in I|\ \xi_\hbar(t,t+\delta\hbar^d]>0\ ,\ \xi_\hbar(t+\delta\hbar^d,t+c\hbar^d]=0\}|\\
\geq\ &\delta\hbar^d n_\hbar^I(c)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&|\{t\in I|\ \xi_\hbar(t+\delta\hbar^d,t+(\delta+c)\hbar^d]=0\}|\ -\ |\{t\in I|\ \xi_\hbar(t,t+(\delta+c)\hbar^d]=0\}|\\
=\ &|\{t\in I|\ \xi_\hbar(t,t+\delta\hbar^d]>0\ ,\ \xi_\hbar(t+\delta\hbar^d,t+(\delta+c)\hbar^d]=0\}|\\
\leq\ &\delta\hbar^d n_\hbar^I(c)
\end{aligned}$$

$\hbar\downarrow 0$ として

$$\frac{\pi_0(c)-\pi_0(c+\delta)}{\delta}\leq\liminf_{\hbar\downarrow 0}\frac{n_\hbar^I(c)}{|I|/\hbar^d}\leq\limsup_{\hbar\downarrow 0}\frac{n_\hbar^I(c)}{|I|/\hbar^d}\leq\frac{\pi_0(c-\delta)-\pi_0(c)}{\delta}\ ,$$

次に $\delta\downarrow 0$ として

$$\lim_{\hbar\downarrow 0}\frac{n_\hbar^I(c)}{|I|/\hbar^d}=-\frac{d}{dc}\pi_0(c)\equiv\rho(c)$$

を得る。

定義 2. $\rho(c)$ がさらに連続的微分可能で

$$\liminf_{c\downarrow 0}(-\rho'(c))>0 \tag{172}$$

が成り立つとき "準位集積が起こる" ということにする。一方

$$\limsup_{c\downarrow 0}(-\rho'(c))=0 \tag{173}$$

が成り立つとき "準位反撥" が起こるということにする。

8.2.2 unfolding に関する考察

有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ における billiard の場合は仮定 1 の下の例に示したように、準古典極限 $\hbar \downarrow 0$ を考えることと、$\hbar = 1$ として高エネルギー極限 $E \to \infty$ を考えることとは同等である。さて、そこに現れる $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ は準位統計では通常、固有値分布の平均部分 (average) と考えられ、$N_{av}(\lambda)$ のように記される。一方で、これと $N_1(\lambda)$ との差は $N_{fl}(\lambda)$ と記され、準位分布の揺らぎ (fluctuation) の部分と考えられている ([4])。こうして固有値分布関数を平均と揺らぎの部分に分離したとするのであるが、筆者はこの考え方に少し疑問を持っている。

まず第一に $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ はあくまでも固有値分布の漸近形を与えているのであって、それを平均と呼ぶのは概念の意図的な混同である。そもそも任意に与えられた数列 $x_1 < x_2 < \cdots$ を平均と揺らぎとに分離するというのは、アプリオリには不可能なのではあるまいか。もちろん、実験物理においてはグラフ上にプロットされたデータに最小二乗法を適用して、滑らかな曲線を取り出すことが日常的に行われている。最小二乗法によれば、その曲線は確かに平均という意味を持つのだが、このようなデータ処理が可能であるためには、揺らぎ＝実験誤差 の統計的性格に対する何らかの仮定が必要であろう。ところが、準位統計においては通常のデータ解析とは逆に、観察したいのは揺らぎの方であって、平均の部分にはむしろ興味が持たれないのである。従ってその揺らぎの性質に初めから何かを仮定するのは本末転倒している。こう考えると、いわゆる unfolding に用いられる $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ は固有値分布関数の平均というよりはむしろ、すべてのビリヤードが、その古典力学系としての性質に関わらず共通に持つ歪みと見なされるべきではないだろうか。つまり unfolding を行うとは、ビリヤードの観察を行うときに共通してデータに含まれるいわば系統誤差を補正するという意味を持つものと考えられるのである。その意味では、Bohigas-Giannoni ([4], p.12) のように、数学的に精密な結果があるからといって、高次の項まで含んだ固有値分布の漸近公式を用いて unfolding を行うのは正しくないと思う。なぜなら、固有値分布の漸近公式において、領域の体積のみに依存する第一項 $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ より高次の項は領域 Ω の境界の形状に依存し、従ってビリヤードの力学的性質を多少なりとも反映しているはずなのであって、それを用いて unfolding することは、本来観察すべきものの一部を系統誤差としてあらかじめ取り除いてしまうことになるからである。

もっとも Bohigas-Giannoni が議論している 2 次元の場合では、

$$N_{av}(\lambda) = \frac{\sigma}{4\pi}E - \frac{\gamma}{4\pi}\sqrt{E} + K + \mathcal{O}(E^{-\eta/2}\log E) \quad (0 < \eta \leq 1)$$

となっており、これを用いて真の準位 $\{E_n\}$ の unfolding

$$\lambda_n = N_{av}(E_n)$$

を行ったとしても例えば間隔分布の測定には何ら影響を与えない。実際

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \quad = \quad \frac{\sigma}{4\pi}(E_{n+1} - E_n) - \frac{\gamma}{4\pi}(\sqrt{E_{n+1}} - \sqrt{E_n}) \ + \ o(1)$$

注. 上記の **定義** 1. はハミルトニアンのスペクトルがあるスケールの範囲でエルゴード的点過程のサンプルに見えるという想定に基づいている。そこで、点過程論との対応を見るために、$N = N_\omega = \{x_n(\omega)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(x_0(\omega) \le 0 < x_1(\omega))$ を平均密度 $m = 1$ のエルゴード的点過程とし、我々の unfolded levels が $\lambda_n(\hbar) = \hbar^d x_n(\omega)$ で与えられているとする。点過程 N が定義された確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 、N の Palm 測度を $\hat{P}$ とすると、$m = 1$ より $\hat{P}(\Omega) = 1$ となる。さて $I = [a, b]$, $c > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\mathcal{A}_k^I(\hbar; c) = \{t \in I \mid (t, t + c\hbar^d] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } \lambda_n(\hbar) \text{ を含む }\} \tag{174}$$

また $L > 0$ として

$$\mathcal{F}_k^I = \{s \in [aL, bL] \mid (s, s + c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } x_n \text{ を含む }\} \tag{175}$$

とおくと、

$$|\mathcal{A}_k^I(\hbar; c)| = \hbar^d |\mathcal{F}_k^I(\hbar^{-d}; c)| \ . \tag{176}$$

従って $L = \hbar^{-d}$ とおきかえると命題 6.2 より確率 1 で

$$\lim_{\hbar \downarrow 0} \frac{1}{|I|} |\mathcal{A}_k^I(\hbar; c)| = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{|I| L} |\mathcal{F}_k^I(L; c)| = P(N_\omega(0, c] = k) \ . \tag{177}$$

従ってこの場合 $\pi_k^I(c)$ は実際に“長さ c の区間が k 個の準位を含む確率”を表している。

次に

$$n_k^I(c) = \sharp\{n \mid \lambda_n(\hbar) \in I \ , \ \lambda_{n+1}(\hbar) - \lambda_n(\hbar) > c\hbar^d \} \tag{178}$$

$$= \sharp\{n \mid x_n \in [\hbar^{-d} a, \hbar^{-d} b] \ , \ x_{n+1} - x_n > c \} \tag{179}$$

を考えると、(156) の証明と同様にして、確率 1 で

$$\lim_{\hbar \downarrow 0} \frac{n_\hbar^I(c)}{n_\hbar^I(0)} = \frac{1}{\hat{P}(\Omega)} \hat{P}(x_1 > c) = \hat{P}(x_1 > c) \ . \tag{180}$$

従って $\rho(c)$ は Palm 測度 $\hat{P}$ の下での“間隔分布”を表している。一方命題 7.6-(iii) により

$$\pi_0^I(c) = P(N(0, c] = 0) = P(x_1 > c) = \int_c^\infty \hat{P}(x_1 > s) ds \ . \tag{181}$$

右辺はさらに $\int_c^\infty \hat{P}(N(0, s] = 0) ds$ となる。これは Palm-Khinchin の等式（5節）で $k = 0$ としたものに相当する。$\pi_0^I(c)$ が c について微分可能ということは $\hat{P}(x_1 > s)$ が s について連続ということと同値である。$\hat{P}(x_1 > s)$ の不連続点は高々可算個だから、命題 1 の条件は“ハミルトニアンのスペクトル＝定常点過程のサンプル”というフィクションが成り立つ限りは、可算個の $c > 0$ を除いて成り立っていると期待される。

$$
\begin{aligned}
&= (E_{n+1}-E_n)\left(\frac{\sigma}{4\pi}-\frac{\gamma}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{E_{n+1}}+\sqrt{E_n}}\right) + o(1) \\
&\sim \frac{\sigma}{4\pi}(E_{n+1}-E_n)
\end{aligned}
$$

であり、$N_{av}(E)=\frac{\sigma}{4\pi}E$ として unfolding したのと結果は変わらない。それならばなおさら、初めから $N_{av}(E)=\frac{\sigma}{4\pi}E$ を用いればよいのではなかろうか。

8.2.3 Berry-Tabor の意味の準位統計

やはり自由度 d の束縛系を考え、$H(p,q)$ をその古典ハミルトニアン、$H(\hbar)$ をその量子化、$\{E_n(\hbar)\}_{n\geq 0}$ をエネルギー準位とする。前節とは別に次の仮定をする。

仮定 2. 任意の $E>0$ に対して定数 $\nu(E)>0$ が存在して

$$N_\hbar(E)=\sharp\{n \mid E_n(\hbar)\leq E\}\sim \nu(E)\hbar^{-d} \quad (\hbar\downarrow 0)\ . \tag{182}$$

さらに $\hbar$ について単調に

$$E_n(\hbar)\ \downarrow\ 0 \quad (\hbar\downarrow 0)\ n=1,2,\ldots\ . \tag{183}$$

Berry と Tabor は "regular spectrum と irregular spectrum を区別するにはエネルギー準位の間隔分布を見ればよい" と提案する一方で次のように一見矛盾することも述べている。([3] p.377)

> エネルギー E は準位を記述するパラメータとしては次の２つの理由により不適当である：
>
> (1) mean level density は E に依存する。
>
> (2) 準位の間隔分布等、準位の統計的な性質自体が考えているエネルギー領域に依存する可能性がある。
>
> (Now E is an unsuitable parameter to describe the levels, for two reasons. The first is that the *mean level density* $\bar{n}(E)$ depends on energy.$\cdots$ The second reason is that the statistics of the levels might themselves depend on the region of energy being studied.)

この問題に対する解決として Berry と Tabor は以下に述べる意味で "Planck 定数を量子化する" ことを提案している。

まず仮定 2. により $E_n(\hbar)$ の軌跡が図のようになっていることに注意する。

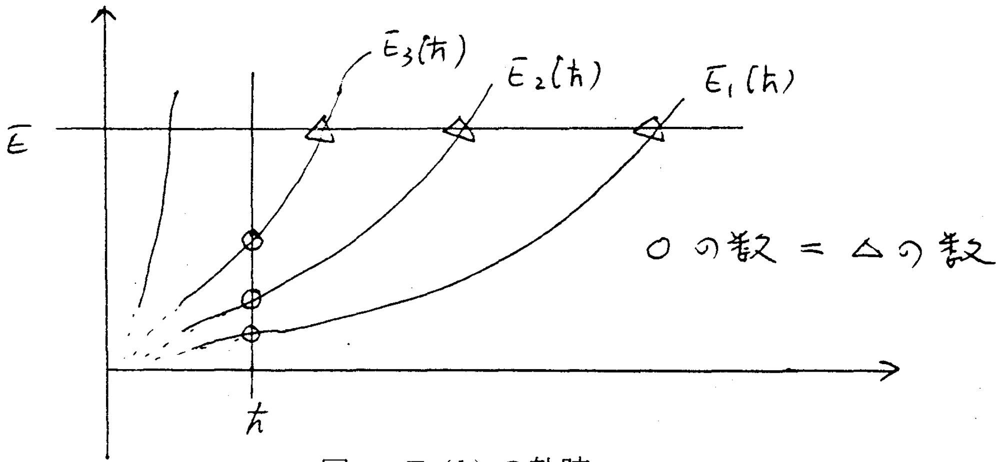

図 1: $E_n(\hbar)$ の軌跡

$E>0$ の値を一つ固定し、各 $n \geq 1$ に対し $\hbar = \hbar(n)$ を

$$E_n(\hbar) = E \tag{184}$$

の解として定める。さらに

$$U_n = \nu(E)\hbar(n)^{-d} \tag{185}$$

と定義すると、仮定 2、および図により

$$\begin{aligned}
\sharp\{n|U_n \leq U\} &= \sharp\{n|\hbar(n) \geq (\nu(E)U^{-1})^{1/d}\} \\
&= \sharp\{n|E_n((\frac{\nu(E)}{U})^{1/d}) \leq E\} \\
&\sim \nu(E)\{(\nu(E)/U)^{1/d}\}^{-d} = U \quad (U \to \infty)\ .
\end{aligned}$$

即ち $\{U_n\}_n$ は漸近的に密度 1 で 一様分布している。

定義 3. 任意の $k = 0, 1, \ldots$ と任意の $c > 0$ に対して極限

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} |\{t \leq U \mid (t, t+c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } U_n \text{ を含む }\}| \equiv p_k^E(c) \tag{186}$$

が存在するとき（エネルギー E において）“Berry-Tabor の意味の準位統計が可能” ということにする。但し $|A|$ は集合 A のルベーグ測度（あるいは長さ）。

前節と同様に次の命題が成り立つ。

命題 8.2 Berry-Tabor の意味の準位統計が可能で、 $p_0^E(c)$ が $c>0$ について微分可能ならば、極限

$$\rho^E(c) \equiv \lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \sharp\{n|U_n \leq U \text{ かつ } U_{n+1} - U_n > c\} \tag{187}$$

が存在して $-\frac{d}{dc}\, p_0^E(c)$ に等しい。

$\rho^E(c)$ がさらに連続的微分可能で

$$\liminf_{c\downarrow 0}\left(-\frac{d}{dc}\rho^E(c)\right) > 0 \tag{188}$$

となるとき準位集積がおこり、

$$\limsup_{c\downarrow 0}\left(-\frac{d}{dc}\rho^E(c)\right) = 0 \tag{189}$$

のとき準位反撥がおこるということにする。

Sinai の意味の準位統計と Berry-Tabor の意味の準位統計の関係がどうなっているか筆者にはまだよくわからないが、有界領域における Dirichlet Laplacian 等のように

$$E_n(\hbar) = \hbar^2 E_n(1) \quad ; \quad N_1(E) = \sharp\{n | E_n(1) \leq E\} \sim \gamma E^{d/2} \tag{190}$$

となっている場合には両者は一致する。

実際このとき

$$N_\hbar(E) = N_1(E/\hbar^2) \ \sim \ \gamma \hbar^{-d} E^{d/2} \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty) \tag{191}$$

となり、仮定 1 は成立する。また

$$\lambda_n(\hbar) = \gamma E_n(\hbar)^{d/2} = \gamma \hbar^d E_n(1)^{d/2} = \hbar^d \lambda_n(1) \tag{192}$$

である。$L = \hbar^{-d}$ とおいて

$$\mathcal{B}_k^I(L;c) \equiv \{t \in (b_1 L, b_2 L) \mid (t, t+c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } \lambda_n(1) \text{ を含む}\} \tag{193}$$

を考えると

$$\lim_{\hbar\downarrow 0} \frac{|\mathcal{A}_k^I(\hbar;c)|}{|I|} = \lim_{L\to\infty} \frac{|\mathcal{B}_k^I(L;c)|}{|I|L} = \pi_k^I(c) \tag{194}$$

即ち Sinai の意味の準位統計はこの場合 $\hbar = 1$ として高エネルギー極限を考えることに相当する。

一方 $E > 0$ を固定すると当然

$$N_\hbar(E) = N_1(E/\hbar^2) \ \sim \ \hbar^{-d}(\gamma E^{d/2}) \quad (\hbar \downarrow 0) \tag{195}$$

となるから $\nu(E) = \gamma E^{d/2}$ として仮定 2 の前半が成り立っている。また $E_n(\hbar) = \hbar^2 E_n(1) = E$ であるから、明らかに $\hbar \downarrow 0$ とするとき単調に $E_n(\hbar) \to 0$ となる。

$$E_n(\hbar) = \hbar^2 E_n(1) = E \tag{196}$$

を $\hbar$ について解いて

$$\hbar(n) = \sqrt{\frac{E}{E_n(1)}} \tag{197}$$

を得るが、これより

$$U_n = \nu(E)\hbar(n)^{-d} = \gamma E_n(1)^{d/2} = \lambda_n(1) \ . \tag{198}$$

よって $\{U_n\}$ に対する統計（Berry-Tabor の意味の準位統計）は Sinai の意味の準位統計と一致する。

8.3 弱い意味での準位統計

前節および前々節では、$\rho'(c) = (d^2/dc^2)\pi_0(c)$ の $c \downarrow 0$ での挙動によって準位集積 / 準位反撥という区別をした。しかしながら、準位の間隔分布 $\rho(c)$ を厳密にもとめるのは多くの場合望みがたいのが現状のようである。そこで、ここでは弱い意味での準位集積 / 準位反撥という概念を導入し、それらを以下に定義するような、区間 $(t, t+c]$ 内の準位数

$$\mathcal{N}(t) \equiv \sharp\{\ n \mid U_n \in (t, t+c]\ \} \tag{199}$$

の階乗モーメント (factorial moments) $\mu_k(c)$ を用いて判別することを考えてみる。

$c > 0$, $U > 0$, $k = 0, 1, \ldots, K$ に対して

$$\mu_k(c;U) \equiv \frac{1}{U}\int_0^U \frac{1}{k!}\mathcal{N}(t)\{\mathcal{N}(t)-1\}\cdots\{\mathcal{N}(t)-(k-1)\}dt \tag{200}$$

$$= \frac{1}{U}\int_0^U \begin{pmatrix} \mathcal{N}(t) \\ k \end{pmatrix} dt \tag{201}$$

および

$$\sigma(c;U) = \frac{\sharp\{n \geq 1 | U_n \leq U\ ,\ U_{n+1} - U_n \leq c\}}{\sharp\{n \geq 1 | U_n \leq U\}} \tag{202}$$

と定義し、さらに

$$\bar{\mu}_k(c) = \limsup_{U\to\infty} \mu_k(c:U) \quad ; \quad \underline{\mu}_k(c) = \liminf_{U\to\infty} \mu_k(c:U)\ ; \tag{203}$$

$$\bar{\sigma}(c) = \limsup_{U\to\infty} \sigma(c;U) \quad ; \quad \underline{\sigma}(c) = \liminf_{U\to\infty} \sigma(c;U) \quad ; \tag{204}$$

とおく。$\sigma(c) = \lim_{U\to\infty} \sigma(c;U)$, $\mu_k(c) = \lim_{U\to\infty} \mu_k(c;U)$ が存在することは

$$\bar{\sigma}(c) = \underline{\sigma}(c) = 1 - \rho(c) \quad ; \quad \bar{\mu}_k(c) = \underline{\mu}_k(c) \tag{205}$$

と同等である。

さて、準位集積（あるいは準位反撥）とは、互いに接近した準位の統計的頻度が高い（あるいは低い）ということだから、それを最も広い意味に解釈して、次の定義をする：

定義 4. 広義の準位集積とは、

$$\liminf_{c \searrow 0} \frac{\sigma(c)}{c} > 0 \tag{206}$$

となることをいう。また広義の準位反撥とは

$$\limsup_{c \searrow 0} \frac{\bar{\sigma}(c)}{c} = 0 \tag{207}$$

となることをいう。

証明は省略するが、次の命題が成り立つ：

命題 8.3

(i) すべての $c > 0$ に対して $\mu_1(c) = c$ であり、さらに $\bar{\mu}_2(c) = o(c^2)$ $c \searrow 0$ となるならば、広義の準位反撥である。

(ii) すべての $c > 0$ に対して $\mu_1(c) = c$, $\mu_2(c) = \frac{1}{2}c^2$ かつ $\bar{\mu}_3(c) = o(c^2)$ $c \searrow 0$ となるならば、広義の準位集積である。

例えば、次節で論ずる regular spectrum の場合、$\mu_1(c) = c$ は常に成り立つことが容易に証明される。さらに $\mu_k(c) = c^k/k!$, $k = 2, 3, \ldots$ も成り立つならば、じつは定義 2 の意味での準位統計ができて、$p_k^E(c) = e^{-c}c^k/k!$ となる。特に、命題 8.2 により、$\rho(c) = e^{-c}$ となり、regular spectrum は Poisson 点過程に見えるという Berry-Tabor の予想が証明されることになるのだが、現実には $\mu_2(c)$, $\mu_3(c)$ あたりを求めるのがすでに困難である。命題 8.3-(ii) は、3 次までの階乗モーメントが Poisson 点過程のものと一致すれば、広義の準位集積が見られることを示している。

なお、近年数論的量子カオスの研究において k-point correlation というものがよく計算される。これは $k \geq 2$, $c > 0$ に対して

$$R_k(c) = \lim_{U \to \infty} R_k(c; U) \; ; \tag{208}$$

$$R_k(c; U) = \frac{1}{k!}\frac{1}{U}\sharp\{(U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}) | U_{n_1}, \ldots, U_{n_k} \leq U \quad \max_{1 \leq j \leq k} U_{n_j} - \min_{1 \leq i \leq k} U_{n_i} \leq c\} \tag{209}$$

と定義されるものである。ただし $U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}$ は互いに異なるものとする。k-point correlation と k 次の階乗モーメントの関係は次のように要約される：

命題 8.4

(i) すべての $c > 0$ に対して $R_k(c)$ が存在するならば、$\mu_k(c)$ も存在して

$$\mu_k(c) = \int_0^c R_k(c')dc' \, . \tag{210}$$

(ii) すべての $c>0$ に対して $\mu_k(c)$ が存在するならば、$\frac{d}{dc}\mu_k(c)$ が存在するような c において $R_k(c)$ も存在して

$$\frac{d}{dc}\mu_k(c) = R_k(c) \ . \tag{211}$$

8.4 regular spectrum に対する準位統計と格子点問題

自由度 d の束縛系が完全可積分のとき、いわゆる作用 - 角変数に変換することで系の古典ハミルトニアン $H(p,q)$ は作用変数 $I=(I_1,\ldots,I_d)$ のみの関数 $H=H(I)$ となり、もとの力学系は torus 上の一様運動に移る。(詳しくは Arnold [2] を参照のこと。)

仮定 3. 系のエネルギー準位は EBK-quantization （あるいは torus quantizaton ）により

$$E_{\vec{n}}(\hbar) = H\left(\hbar(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha})\right) \quad (\vec{n}=(n_1,\ldots,n_d)\in \boldsymbol{Z}_+^d) \tag{212}$$

のように与えられる。ただし $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in \boldsymbol{Z}_+^d$ は Maslov index と呼ばれるもので、系を記述する古典力学から決まる。(EBK とは Einstein, Brillouin, Keller の頭文字である。)

$\{E_{\vec{n}}(\hbar)\}_{\vec{n}\in \boldsymbol{Z}_+^d}$ を Percival, Berry-Tabor に従って regular spectrum と呼ぶ。これが真のエネルギー準位をどの程度近似しているかは今は問わないことにするが、調和振動子や直方体の中の billiard については EBK quantization により得られるスペクトルはすべての準位を正確に与えている：実際、作用変数 I を $2\pi I_j=\oint p_j dq_j$ により導入すると、系のハミルトニアン、エネルギー準位は次のようになる。

調和振動子 $H(I)=\sum_{j=1}^d \omega_j I_j$; $\vec{\alpha}=(2,2,\ldots,2)$;

$$E_{\vec{n}}(\hbar) = H(\hbar(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha})) = \hbar\sum_{j=1}^d \omega_j(n_j+\frac{1}{2}) \ . \tag{213}$$

直方体ビリヤード a_j , $j=1,\ldots,d$ m $H(I)=\frac{\pi^2}{2m}\sum_{j=1}^d (I_j/a_j)^2$; $\vec{\alpha}=(0,\ldots,0)$;

$$E_{\vec{n}}(\hbar) = \hbar^2\frac{\pi^2}{2m}\sum_{j=1}^d\left(\frac{n_j}{a_j}\right)^2 \ . \tag{214}$$

8.4.1 regular spectrum に対する Berry-Tabor の意味での準位統計

$\vec{x}\in \boldsymbol{R}_+^d\setminus\{\vec{0}\}$ に対して $\hbar(\vec{x})>0$ を

$$H(\hbar(\vec{x})\vec{x}) = E \tag{215}$$

により定める。これは各 $E>0$ に対して $\{\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d|\ H(\vec{x})=E\}$ が有界かつ star shaped ならば可能である。

$E>0$ を固定して $\hbar\downarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned}N(\hbar;E) &= \sharp\{\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d\mid E_{\vec{n}}(\hbar)\le E\}\\ &= \sharp\{\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d\mid H(\hbar(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha}))\le E\}\\ &\sim \hbar^{-d}\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}_+^d}1_{\{H(I)\le E\}}dI_1\cdots dI_d \ \equiv\ \nu(E)\hbar^{-d}\ .\end{aligned}$$

さて

$$U(\vec{x})=\nu(E)\hbar(\vec{x})^{-d}\quad,\quad \vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d \tag{216}$$

として $\{U(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha})|\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d\}$ に対する統計を考える。

$\beta>0$ 、 $\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d$ ならば

$$E=H(\hbar(\beta\vec{x})\beta\vec{x})=H(\hbar(\vec{x})\vec{x})$$

だから

$$\beta\hbar(\beta\vec{x})=\hbar(\vec{x})\ ,$$

従って

$$U(\beta\vec{x})=\beta^dU(\vec{x}) \tag{217}$$

となることに注意。また $\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d\setminus\{\vec{0}\}$ に対し、$\varphi=\varphi(\vec{x})=\vec{x}/|\vec{x}|$ とおく。すると $\vec{n'}=\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha}$ と書くことにして

$$\begin{aligned}& t<U(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha})<t+c\\ \Leftrightarrow\ & t<|\vec{n'}|^dU(\varphi(\vec{n'}))<t+c\\ \Leftrightarrow\ & U(\varphi(\vec{n'})^{-1/d}t^{1/d}<|\vec{n'}|<U(\varphi(\vec{n'}))^{-1/d}(t+c)^{1/d}\\ \Leftrightarrow\ & \nu(E)^{-1/d}\ \hbar(\varphi(\vec{n'}))\ t^{1/d}<|\vec{n'}|<\nu(E)^{-1/d}\ \hbar(\varphi(\vec{n'}))\ (t+c)^{1/d}\end{aligned}$$

が成り立つ。また $\{\vec{x}|\ |\vec{x}|=\hbar(\varphi(\vec{x}))\}$ が I 空間における等エネルギー面を表すことに注意すると

$$\Pi_c(t)\equiv\{\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d|U(\varphi(\vec{x}))^{-1/d}\ t^{1/d}<|\vec{x}|<U(\varphi(\vec{x}))^{-1/d}\ (t+c)^{1/d}\} \tag{218}$$

により定義される領域の体積は

$$|\Pi_c(t)|=c \tag{219}$$

であることがわかる。

$$t < U(\vec{n'}) < t + c \;\Leftrightarrow\; \vec{n'} \in \Pi_c(t)$$

であるから

$$\xi(t) \equiv \sharp\{\Pi_c(t) \cap (Z^d_+ + \frac{1}{4}\vec{\alpha})\}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^L_k(c) &\equiv \{t \le L \mid (t, t+c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } U(\vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha}) \text{ を含む}\} \\ &= \{t \le L \mid \xi(t) = k\}\,. \end{aligned}$$

となる。

こうして我々は次の問題に導かれる。

問題 何らかの意味で generic なハミルトニアンから作られる $\Pi_c(t)$ に対して、極限

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}|\mathcal{A}^L_k(c)| = \pi_k(c) \tag{220}$$

が存在するか？またそれは Poisson 分布 $\pi_k(c) = e^{-c}c^k/k!$ となるか？

$d = 2$ であり、かつ $\Pi_c(t)$ の境界をなす曲線がランダムである場合、そのランダム曲線の殆どすべての実現に対して上のことが成立することが示されている。([12] を見よ。また [21] も参照されたい。) しかしそのランダムネスに対する条件は非常に強く、通常のハミルトニアンから得られるような自然な具体例は殆どそれをみたさない。実際その条件の下で、$\Pi_c(t)$ の境界は C^2 曲線ではありえない ([12]) 。

8.4.2 regular spectrum に対する Sinai の意味の準位統計

Sinai の意味の準位統計を考えるときは

$$N_\hbar(E) = \sharp\{\vec{n} \in Z^d_+ | H(\hbar(\vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha})) \le E\} \sim \gamma\frac{E^{d/2}}{\hbar^d} \;\; (\sqrt{E}/\hbar \to \infty) \tag{221}$$

を仮定するのであった。そのためハミルトニアン H が

$$H(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 F(\varphi(\vec{x})) \quad (F > 0) \tag{222}$$

という形であることを仮定する。

$$G(\varphi(\vec{x})) = F(\varphi(\vec{x}))^{-1/2}\;;\; \gamma = |\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^d_+ |\; |\vec{x}| \le G(\varphi(\vec{x}))\}| \tag{223}$$

とすると

$$N_\hbar(E) \sim \gamma(\sqrt{E}/\hbar)^d \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty) \tag{224}$$

となることは容易にわかる。$\vec{n'} = \vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ として unfolded levels

$$\lambda_{\vec{n'}}(\hbar) = \gamma E_{\vec{n'}}(\hbar)^{d/2} = \gamma H(\hbar \vec{n'}) \tag{225}$$

を考えると $t \in (b_1, b_2) = I$ に対して

$$\begin{aligned} & t < \lambda_{\vec{n'}}(\hbar) < t + c\hbar^d \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{t}{\gamma \hbar^d}\right)^{1/d} G(\varphi(\vec{n'})) < |\vec{n'}| < \left(\frac{t + c\hbar^d}{\gamma \hbar^d}\right)^{1/d} G(\varphi(\vec{n'})) \end{aligned}$$

となって先と同様の格子点問題に導かれる。

9　補記

この論文の初稿に対して大変詳しいコメントをくださった、佐野光貞氏（京都大学総合人間学部）と編集委員の小嶋泉氏とに深く感謝する。表現上の難点については、ご指摘に従って可能な限り修正を施したつもりである。ただし、物理学者としての佐野氏のご意見については、筆者の意図が十分に伝わらなかったためと思われる点もあるので、本節で回答させていただきたい。これをきっかけに、別の角度からのご批判がいただければよいと思う。

1. “8節で実際に扱っているのは regular spectrum だけなのだから、節のタイトルもそれに応じて変更した方がよい”と佐野氏は指摘しておられるが、これについては初稿のままとした。筆者が8節において問題にしたのは、古典力学と対応のつくハミルトニアン $H(\hbar)$ を持つような量子系に対する準位統計の定式化、あるいは“定義”なのであって、そのことは対応する古典系が可積分であるか、カオス的であるかとは一応無関係なことがらだと思っている。例えば、準位の集積および反撥は、$H(\hbar)$ のスペクトルに対して何らかの統計操作を行った後で初めて現象として見えてくるものなのであり、その統計操作の定義があいまいでは、現象の記述そのものに信頼が置けないであろう。regular spectrum に対する準位統計を EBK-量子化を通して格子点の問題に帰着させたり、カオス系に対して跡公式を用いたりするのは、その次に来るべき話だと思う。8.2.2 項で unfolding の定義にこだわったのも、そういう意味からである。

例えば筆者が文献 [14] において示したように、一次元系に対しては Sinai の意味の準位統計に近いことが厳密に実行でき、その結果準位集積が示される。一次元系が準位集積を示すか、準位反撥を示すかについては意見がわかれていたが、実は“統計”の定義が正確になされなかったことがその混乱の原因と考えられるのである。（なお、統計のとりかたを変えると準位反撥が見られる可能性のあることも [14] で指摘しておいた。）

そもそも筆者がこの論文で示したかったのは、例えば間隔分布や number variance というような、準位統計の諸現象を記述するための諸概念が、すべて点過程論に対応物を持っていること、したがって準位統計とは、量子ハミルトニアンのスペクトルを点過程の典型的な実現と見なした上でその統計的性質を特徴づけることに他ならないということなのである。その意味で本稿は現象の記述に関する考察なのであり、記述された現象を物理系の内部に立ち入って説明することを直接の目的としたものではない。(もちろん現象の記述とその理論的説明とは必ずしも峻別できるものではなく、研究の進展につれて現象の定義自体にも修正を加える必要が生じ得ることは認識している。) 佐野氏は別のところで、“量子カオス系については、南氏の点過程としてのアプローチとは異なり、(中略) 跡公式を出発点にしながら Σ^2 などの統計量について調べていくのが一つの方向となっている” と述べられているが、上記のことから明らかなように、この2つの “アプローチ” は相補的な関係にあるわけである。つまり、跡公式を用いて計算されたものの統計的な意味を論ずるのが点過程論の役割ではないかと筆者は考えるのである。

2. Berry-Tabor の意味と Sinai の意味の準位統計との関係について、物理学者の意見を伺うために少し付言しておく。Sinai の意味の準位統計においては、実際にハミルトニアンのスペクトルとして得られた点列に対して統計操作を行い、しかる後に $\hbar \downarrow 0$ の極限を考えるもので、発想としては自然だと思う。しかし、その考えを例えば regular spectrum に適用して見ると、そこから導かれる数学の問題 (格子点問題) が Berry-Tabor の意味の準位統計から導かれるものほどすっきりした形をとらない。また Sinai 式準位統計の前提とした 仮定1 は例えば $d-$ 次元調和振動子の場合は

$$N_\hbar(E) \sim \gamma \hbar^{-d} E^d \quad (E/\hbar \to \infty)\ ; \tag{226}$$

$$\gamma^{-1} = d! \prod_{j=1}^{d} \omega_j \tag{227}$$

のように修正を要するが、Berry-Tabor 式準位統計の前提とした 仮定2 の (182) はより普遍的に成立するもののように思われる。このように数学的な美しさという点では Berry-Tabor のアイディアがすぐれていると筆者は感じているのだが、“プランク定数を量子化する” というのはたとえ言葉のアヤとしても奇妙に聞こえる。このあたりを物理学者はどうお考えだろうか。

なお、$d-$ 次元調和振動子の場合は、(226) に基づいて、unfolded levels の定義を $\lambda_n(\hbar) = \gamma E_n(\hbar)^d$ と修正すれば Sinai 式準位統計はやはり定式化でき、Berry-Tabor 式準位統計と同じ問題に帰着することが容易にわかる。ところが、Berry-Tabor が [3] で考察したような、直方体ビリヤードと調和振動子を混合したモデルに対しては、2つの準位統計の関係はあまり明確にならないようである。

3. 初稿の 8.3 節 “弱い意味の準位統計” は数学的な誤りを含んでいることに気がついた

ので、大幅に書き直した。しかし、この部分は日大での講義のおりには話さなかったことであり、また別の論文に書く意向も持っているので、ここでは数学的な証明（といっても初等的なものだが）には立ち入らず、結論だけを簡潔に記すにとどめた。

Berry-Tabor が主張したような regular spectrum の Poisson 性を文字どおりに正当化しようとすると、8.4.1 の最後に述べたような格子点問題を解かねばならないことになる。具体的なハミルトニアンから得られる曲線で、この問題を解決するものは、佐野氏もいうようにまだ知られていないし、それを見出すのは非常に難しいのではないかというのが、現時点での筆者の感想である。当面は狭義の準位集積（即ちスペクトルの Poisson 性）を証明することはあきらめて、8.3 節のような意味での弱い準位集積を具体例について証明することに集中すべきではないだろうか。筆者がこう考える別の理由は、文献 [14] で扱った一次元系のように、準位の間隔分布が厳密に求められ、それは明らかに準位集積を示すのに、近似的にしか Poisson でないものが実際にあるからである。すなわち、かならずしも厳格に

$$\text{準位集積} = \text{スペクトルの Poisson 性}$$

と考えなくてよさそうである。この点をもっと明らかにしたいと思っている。

参考文献

[1] M. Aizenman, S.A. Molchanov: Localization at a large disorder and at extreme energies. Comm. Math. Phys. vol. 157, 245–278 (1993)

[2] V. I. Arnold: Mathematical methods of classical mechanics. Springer (1978)

[3] M. V. Berry, M. Tabor: Level clustering in the regular spectrum. Proc. R. Soc. Lond. A. vol.356, 375-394 (1977)

[4] O. Bohigas, M. J. Giannoni: Chaotic motion and random matrix theories. in: J. S. Dehesa et al. (eds.) Mathematical and computational methods in nuclear physics. Lect. Notes in Phys. vol.209, 1–99 (1984)

[5] R. Carmona, J. Lacroix: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Birkhäuser, Boston, 1990

[6] D.J. Daley, D. Vere-Jones: An Introduction to the Theory of Point processes. Springer Verlag, New-York, 1988

[7] G.M. Graf: Anderson Localization and the space-time characteristic of continuum states. J. Stat. Phys. vol.75, 337–346 (1994)

[8] A. Hanen: Processus Ponctuels Stationaires et Flots Speciaux. Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistique, Vol. VII, no.1, 23–30 (1971)

[9] H. Kestelman: On the Functional Equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Fundamenta Mathematicae, vol.34, 144–147 (1947)

[10] J.F.C. Kingman: Poisson Processes. Oxford, Clarendon Press, 1993

[11] H. Kunz, B. Souillard: Sur le spectre des opérateurs aux différence finies aléatoires. Comm. math. Phys. 78, 201–246 (1980)

[12] P. Major: Poisson law for the number of lattice points in a random strip with finite area. Prob. Th. Rel. Fields vol.92, 423–464 (1992)

[13] N. Minami: Local Fluctuation of the Spectrum of a Multidimensional Anderson Tight Binding Model. Comm. Mth. Phys. 177, 709–725 (1996)

[14] N. Minami: Level Clustering in a Finite System. Progr. Theor. Phys. Supplement No. 116 (1994)

[15] S.A. Molchanov: The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator. Comm. Math. Phys. vol.78, 429–446 (1981)

[16] J. Neveu: Processus Ponctuels. Lect. Notes in Math. 598, 249–445, 1976

[17] I. C. Percival: Regular and irregular spectra. J. Phys. B. Vol.6, L229-L232 (1973)

[18] M.M. Rao: Paradoxes in conditional probability. J. Multivariate Analysis vol.27, 434–446 (1988)

[19] M. Reed and B. Simon: Method of modern mathematical physics. vol.I, Functional analysis. Academic Press

[20] Ya. G. Sinai: Mathematical problems in the theory of quantum chaos. in: J. Lindenstrauss, V. D. Milman (eds.) Geometric aspects of functional analysis, Lect. Notes in Math. vol.1469, 41–59 (1991) and in: D. K. Campbell (ed.) Chaos, American Inst. Phys. (1990)

[21] Ya. G. Sinai: Poisson distribution in a geometric problem. Adv. Sov. Math. (A.M.S.) vol.3, 199–214 (1991)

[22] 十時東生: エルゴード理論入門. 共立出版, 1971

[23] 西尾真喜子: 確率論. 実教出版, 1978

[24] 長谷川洋: 量子系の準位統計–量子カオス序論. 共立出版, 物理学最前線 28, 1991

[25] 南就将: 準位集積はなぜ起こるか? 数理科学 1994 年 10 月号